Dr. Rivanaldo Martins Lopes

INOVAÇÃO MATEMÁTICA

ensino-aprendizagem de trigonometria utilizando relógio e ângulo, na prática do ensino médio

Periodicojs

EDITORA ACADÊMICA

Dr. Rivanaldo Martins Lopes

INOVAÇÃO MATEMÁTICA

ensino-aprendizagem de trigonometria utilizando relógio e ângulo, na prática do ensino médio

Periodicojs
EDITORA ACADÊMICA

Conselho Editorial

Projeto Gráfico, editoração e capa
Editora Acadêmica Periodicojs

Idioma
Português

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

A395 Matemática na contemporaneidade: desafios e inovações na geometria do relógio- Volume 35. / Rivanaldo Martins Lopes – João Pessoa: Periodicojs editora, 2023.

E-book: il. color.

Inclui bibliografia
ISBN: 978-65-6010-020-6

1. Matemática. 2. Geometria. I. Lopes, Rivanaldo Martins. II. Lima, Rosiane de Lourdes Silva de. III. Título.

CDD 510

Elaborada por Dayse de França Barbosa CRB 15-553

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática: 510

Obra sem financiamento de órgão público ou privado. Os trabalhos publicados foram submetidos a revisão e avaliação por pares (duplo cego), com respectivas cartas de aceite no sistema da editora.

A obra é fruto de estudos e pesquisas da seção de Teses e Dissertações na America Latina da Coleção de livros Humanas em Perspectiva

Filipe Lins dos Santos
Presidente e Editor Sênior da Periodicojs

CNPJ: 39.865.437/0001-23

Rua Josias Lopes Braga, n. 437, Bancários, João Pessoa - PB - Brasil
website: www.periodicojs.com.br
instagram: @periodicojs

Prefácio

A obra intitulada de “Matemática na contemporaneidade: desafios e inovações na Geometria do Relógio” é fruto da pesquisa produzida pelo pesquisador Rivanaldo Martins Lopes que teve como orientadora a professora Rosiane de Lourdes Silva de Lima. A publicação desse livro junto a Editora Acadêmica Periodicojs se encaixa no perfil de produção científica produzida pela editora que busca valorizar diversos pesquisadores por meio da publicação completa de suas pesquisas. A obra está sendo publicada na seção Tese e Dissertação da América Latina.

Essa seção se destina a dar visibilidade a pesquisadores na região da América Latina por meio da publicação de obras autorais e obras organizadas por professores e pesquisadores dessa região, a fim de abordar diversos temas correlatos e mostrar a grande variedade temática e cultural dos paises que compõem a America Latina.

Essa obra escrita pelo pesquisador possui grande relevância ao apresentar o uso do relógio como estratégia para o ensino da matemática. Convém destacar que a riqueza de detalhes e metodologia para o ensino que foi apresentada pelo autor serve de grande referência para a preparação de aulas de diversos professores dessa matéria.

Filipe Lins dos Santos

Editor Sênior da Editora Acadêmica Periodicojs

Sumário

INTRODUÇÃO

Atualmente no Brasil, o ensino de trigonometria na circunferência trigonométrica, conteúdo da disciplina da BNCC, da área de exatas e da natureza, encontra-se no currículo da educação básica, especificamente na segunda série do ensino médio em escolas públicas e privadas de ensino, estabelecido pelo Ministério da educação. São distribuídos a trigonometria no círculo trigonométrico e no triângulo retângulo. Neste trabalho de pesquisa, estuda-se a circunferência trigonométrica de raio unitário e todas as conjeturas de ângulos arcos e medidas.

Neste contexto, o ensino de trigonometria sempre foi tratado pelos estudantes com muita dificuldade quando aplicada na resolução de problemas contextualizado e vivenciados no cotidiano, que envolve interpretação e uso de fórmula para resolução de exemplos e exercícios em sala aula encontrados nos livros didáticos (GOMES, 2015).

Assim, a escolha dessa temática, advém da observação das dificuldades encontradas no ensino de trigonometria, visto que, em se tratando de encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio, utilizando a regra de três simples e, ainda, conversões de múltiplos e submúltiplos de ângulos como minutos e segundo estabelecido pelo sistema internacional de medidas (SI), tem apresentado diversas dificuldades no ensino-aprendizado no ensino médio.

Pautados nessa dificuldade, buscamos na literatura cronológica e sistemática respostas para esta temática com o objetivo de desenvolver uma equação para definir o ângulo, e atender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e professores do ensino de matemática da educação básica. Através de metodologias inovadores que poderão proporcionar aprendizagem para alunos e contribuir para toda a comunidade da escola pública integral do Município de São Francisco/PB, Brasil, bem como identificar o porquê de os estudantes apresentarem diversas dificuldades na aprendizagem e praticabilidade no ensino de trigonometria no ensino médio.

Além dessa dificuldade na prática, é importante evidenciar a evolução da história da matemática do século XVII ao XIX, enfatizando grandes descobertas no estudo de uma equação que relaciona horas e minutos, usando as propriedades de proporcionalidades e da continuidade aos estudos de trigonometria na circunferência trigonométrica estudada por Tozatto Souza (2018).

Assim, o novo modelo matemático apresenta-se como uma ferramenta que busca auxiliar professores e estudantes na resolução de problemas de trigonometria, De forma prática, para encontrar o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, é muito simples, basta compreender a circunferência trigonométricas e suas divisões quando s utiliza um relógio, visto que, a relação entre os ponteiros através da proporção, é o ponto chave para compreender essa interpretação e utiliza-la na resolução de exercício que envolva este conteúdo (TOZATTO SOUZA, 2018. P.45).

Nesse contexto, é de extrema importância entender como os alunos e professores de matemática do ensino médio têm aproveitado os conhecimentos de trigonometria, para calcular o ângulo de um arco contido em uma circunferência trigonométrica orientada, bem como diagnosticar suas dificuldades. Além disso, esta pesquisa propõe disponibilizar para os estudantes e professores um novo modelo matemático produzido a partir da utilização do relógio como instrumento auxiliar.

PROBLEMA

O ensino de trigonometria da circunferência trigonométrica, presente na educação dos estudantes, desde as civilizações antigas até o ensino atual, é uma realidade cotidiana para milhões de estudantes e professores do mundo inteiro. Baseados nessa premissa, o ensino da educação básica sofreu grandes transformações tanto para os alunos, como para os professores de todas as áreas do conhecimento, principalmente no que diz respeito às metodologias utilizadas em salas de aula na resolução de problemas, a exemplo da trigonometria, visto que sempre foram trabalhados de formas desproporcional à realidade social de cada região dos estudantes brasileiros.

É sabido que o ensino de matemática sempre foi visto como uma disciplina de conteúdos complexo para se compreender e resolver problemas de trigonometria, entretanto, as dificuldades de compreender a trigonometria apresentada em sala de aula por professores e estudantes está relacionada com a metodologia encontrada no ensino público brasileiros, demonstrando a necessidade da geração de novos modelos matemáticos facilitadores do ensino-aprendizado de trigonometria no ensino médio.

Na educação Matemática, diante dos desafios e práticas educativa na contemporaneidade, a questão norteadora dessa pesquisa tem como base identificar as dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem de trigonometria, na prática de resolução de problemas de ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, encontrados em sala de aula por alunos e professores em escolas públicas do município de São Sousa/PB/ Brasil? Além desses questionamentos, a pesquisa busca disponibilizar um novo modelo matemático que propõe resolver todos os problemas de trigonometria a partir da utilização do relógio como instrumento auxiliador.

JUSTIFICATIVA

Na ciência busca-se entender como a pesquisa cientifica na área da matemática, especificamente em trigonometria, tem ascendido para encontrar o ângulo de um arco de circunferência. Vale ressaltar que a busca bibliográfica em acervos digitais (Google Acadêmico) tem grande importância para a realização dessa pesquisa, visto que foram encontrados estudos voltados para essa temática, cuja expectativa para encontrar metodologias que possam aperfeiçoar a aprendizagem e a praticidade do ensino de trigonometria, são de grande importância para o desenvolvimento dessa pesquisa (SOUZA, 2018).

Além disso, a contribuição na prática do ensino de matemática, encontrada na literatura em trigonometria, em especial quanto as habilidades desenvolvidas para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio, poderá contribuir significativamente com o ensino-aprendizado de estudantes de todo território brasileiro, utilizando-se conteúdo dos livros didáticos e suas metodologias aplicadas para a resolução de problemas de trigonometria, conforme observados por Lezzi, (1985) e Reis, (2021).

Outrossim, o ensino de matemática, em trigonometria na circunferência trigonométrica, sempre questionada pelos estudantes como conteúdo de muita dificuldade de compreensão, apresenta-se atualmente como um ícone valioso para a resolução de problemas que envolvem ângulos entre os ponteiros, buscando inovar com o surgimento de um novo modelo matemático (uma nova equação) que relaciona minutos e horas, resgatando a alegria e o gosto pela matemática.

Quanto a viabilidade da realização da pesquisa, cujo objetivo é encontrar o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, há uma importância viável ao pesquisador, por estar disponível por 4 anos para estudos sobre a temática, possuir recursos para realização da pesquisa como também realizar estudos como artigos científicos empíricos, capítulos de livros e livros, com intuito de melhorar a pesquisa sobre ângulo entre os ponteiros de um relógio (JOSÉ, 2019).

A pesquisa, cujo objetivo, é encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio, terá uma contribuição social, na melhoria do ensino de trigonometria em encontrar ângulos entre os ponteiros de um relógio, como também na prática de ensino dos professores da educação brasileiras, com inovação de uma equação para melhor interpretar problemas de trigonometria, obtendo-se como produto a publicação de um capitulo de livro com essa temática e artigos científicos empíricos em acervos digitais.

Nesse cenário, é possível justificar a necessária problematização das principais dificuldades e praticidade na aprendizagem de estudantes do ensino médio para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio do município de São Francisco/PB Brasil.

HIPÓTESE

Presume-se que a dificuldade de alunos e professores de matemática tem uma relação significativa com a prática dos docentes envolvidos no processo ensino aprendizagem no ensino de trigonometria no ensino médio.

Assim, a primeira hipótese H0: estabelece que, a prática tradicional de ensino de ângulo entre dois ponteiros de um relógio, encontrado em sala aula, apresentam muitas dificuldades na aprendizagem e praticidade para alunos e professores. A segunda hipótese H1: afirma que, o ensino inovador de cálculo desse ângulo, quando aplicada a equação $\alpha = ((60\ h-11m))/2$ na trigonometria do relógio, resulta em melhor aprendizagem.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Desenvolver uma equação para encontrar o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, para atender as dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores do ensino de matemática da educação básica, através de metodologias inovadores que poderão facilitar a aprendizagem, contribuindo significativamente para a melhoria do ensino-aprendizagem da escola pública integral do Município de São Francisco/PB, Brasil.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Identificar na literatura recente, o que os autores tem contribuído para o ensino de matemática de escolas públicas quanto as dificuldades encontradas para encontrar o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio;

Buscar através de observações em uma amostra, na ECI Dorgival Silveira São Francisco/PB/Brasil, dados que possam suprir as dificuldades enfrentados pelos professores que ensinam matemática, sobre ângulo entre dois ponteiros de um relógio;

Diagnosticar as principais dificuldades e práticas de ensino utilizados durante as aulas de matemática para encontrar uma uniformidade encantadora para resolver problemas de ângulos entre os ponteiros de um relógio e interpretar através da estatística descritiva;

Inovar com um capítulo de um livro, com a temática: Princípio da Matemática contemporânea: Relação Proporcional absoluto entre ponteiros de um relógio e ângulo.

METODOLOGIA

Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

Este tópico apresenta os caminhos e as possibilidades que serviram de base para a coleta de dados da pesquisa. No caso, o objetivo principal foi desenvolver uma equação para encontrar o ângulo entre dois ponteiros de um relógio, para atenuar as dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores do ensino de matemática da educação básica, através de metodologias inovadores que irá proporcionar aprendizagem para alunos e contribuição para a comunidade da escola pública integral do Município de São Francisco/PB, Brasil.

A abordagem adotada neste estudo possui um caráter quali-quantitativo, permitindo que o pesquisador tenha contato direto com o ambiente. Assim, o pesquisador manterá contato direto com o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo, ou seja, a obtenção de dados quantitativos a partir da formulação de um questionário (PRODANOV, 2013, p. 70).

Além de apresentar caráter quantitativo, a pesquisa em pauta também apresenta natureza descritiva e exploratória, pois necessita recorrer à técnica de análise do Estudo de Caso, permitindo que o pesquisador analise um determinado campo dentre as demais, aprofundando seu conhecimento sobre o assunto, contribuindo com informações peculiares a respeito da temática estudada. Isso significa que os resultados obtidos pelo pesquisador poderão contribuir significativamente para a melhoria prática de toda a comunidade escolar, pois suas informações possibilitarão a resolução de alguns problemas metodológicos que limitam a prática do professor e o aprendizado dos estudantes.

Aporte teórico da pesquisa

Para o levantamento bibliográfico que forneceu suporte a essa pesquisa foi realizado uma revisão de literatura nas principais bibliotecas virtuais disponíveis na internet a saber: Scielo, Google Acadêmico e Periódicos da Capes.

Foram utilizados os seguintes descritores para busca: trigonometria, ângulo, ponteiros do relógio e resolução de exercícios de trigonometria. Após o levantamento bibliográfico foram escolhidos os trabalhos científicos que apresentavam correlação direta com o estudo em pauta, descartando-se todos aqueles resumos e informações de sites não contextualizados.

Para a construção dessa tese foram utilizadas como base literária as obras de EUCLIDES, OLIVEIRA & VAZ, (2014), ALVARENGA et al. (2016), NASCIMENTO (2018), TOZATTO SOUZA, (2018), PONTES, (2018), MONDINI et al. (2019), BRAGA (2020), BARRETO (2020), CARDOSO & OLIVEIRA, (2020), MACHADOS & MATTOS, (2020), MENDES et al. (2020), PEREIRA et al. (2022), ROSSETTO & BALIEIRO FILHO, (2020) , VIEIRA & MOREIRA, (2020), dentre outros.

Delineamento estatístico adotado e Seleção das escolas

Para a realização dessa pesquisa foi formada uma amostra composta por um fatorial triplo envolvendo: 4 escolas, 5 professores e 10 estudantes, provenientes do município de são Francisco/PB/Brasil. As escolas públicas de ensino básico escolhidas para fazer parte da pesquisa foram: EEECI Dorgival Silveira, ECI MESTRE JÚLIO SARMENTO, ECI DR. SILVA MARIZ e E.E.E.F.M CELSON MARIZ.

Levando em consideração que os dados devem ser o mais heterogêneos possível para evitar vícios ou favorecimento de dados, optou-se pelo confronto direto entre os três fatores. Além desse arranjo ser bastante interessante, pois irá mostrar como os professores de matemática trabalham o ensino de trigonometria com os adolescentes, bem como a identificação das dificuldades enfrentadas para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio.

Estrutura física e recursos humanos das escolas selecionadas para a pesquisa

A escola EEECI Dorgival Silveira selecionada para a realização da pesquisa apresenta o seguinte padrão: a escola de ensino médio cidadã integral está localizada do município de são Francisco/PB/Brasil, pertencente a 10ª gerencia regional de ensino (GRE), do estado da paraíba, do sertão paraibano, que oferece ensino médio integral e a modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Composta por 160 alunos matriculados no ano corrente, 15 professores, 1 gestor, 1 coordenador pedagógico, 1 coordenador administrativos financeiro, 2 porteiros, 1 bibliotecária, 1 secretário, 2 cozinheiras e 2 auxiliares de serviços gerais. Já a EJA, esta é composta por 30 alunos e 5 professores. Além desses recursos, a escola é conduzida por apenas 1 diretor, um coordenador pedagógico e CAF.

Dos professores que constitui a escolas apenas quatro professores são efetivo e onze são contratados. Quanto a formação dos docentes, um professor está cursando o doutorado em educação, três são mestres, todos são graduados e especialistas em sua área de atuação. Com renda que varia de 2 a 9 salários mínimos. A direção da escola é composta por um tri gestor (diretora, CP, CAF), ambos contratados e sem processos de eleição para escolha do gestor escolar. Os 160 estudantes da referida escola, são de baixa renda, com diversidade de cultura e gêneros, residentes em zona rural e urbana dos município de são Francisco, Aparecida e Santa cruz paraíba Brasil, de religião católica, evangélica e espirita, laicidade do estado, de famílias que vivem da agricultura familiar, agropecuária, apicultura, autônomos e empregados públicos e privados.

Além dessa adversidade, trançam um caminho com transportes públicos (transporte escolar) dados coletados no (IBGE, 2010), no portal do IBGE da cidade de são Francisco PB. O trio gestor da escola composta de Gestor, coordenador pedagógicos e coordenador administrativos financeiros, são atribuídos estes cargos pela determinação da gerencia regional para poder realizar a gestão escolar e pedagógica da escola. Ambas possuem formação acadêmica (Graduação) em sua área, para atuar diretamente no alinhamento das atividades da escola. Na biblioteca possui uma funcionária responsável pelo bloco, que possui formação, graduada em pedagogia, contratada pela empresa terceirizada do estado.

Para recepcionar os estudantes temos dois porteiros, com função educativa, com formação de ensino médio completo, com atuação exemplar, que auxilia nos processos educativos da escola. Todos participam do projeto políticos pedagógicos (PPP) estabelecidos pela lei 9.394/96, LDB e temos a equipe de 4 pessoas, 2 da limpeza e 2 da cozinha. Todas de ensino médio completo, de renda de 1 salário mínimo, que executam seu trabalho com ênfase para o bem estar dos estudantes.

Com relação a estrutura física, a escola integral apresenta ambientes com boa iluminação. Os ambientes da escola são bem arejados e contam com salas providas de ar-condicionado, cuja distribuição é a seguinte: 1 sala de reunião de professores, 1 sala de informática com equipamentos tecnológicos, 1 biblioteca, 1 almoxarifado, 5 sala de aulas, 1 secretária, 1 sala de direção e 1 auditório. Os demais ambientes da escola são formados por 1 cozinha, 2 caixas de água, 1 banheiros de que atende a pessoas com deficiências, 3 banheiros para professores, 1 banheiros para os funcionários, 4 banheiros para estudantes, 1 lavatório para estudantes para limpeza rosto e higiene bucal e 1 rampa para pessoas com deficiências. Além disso, toda escola é amurada e de fácil acesso, pois localiza-se próxima a BR 395 que liga os municípios de Aparecida e Alexandria passando em são Francisco/PB/Brasil.

Em relação à parte externa, o pátio é grande, com paralelepípedo, com gradilhos e duas entrada em frente à escola, com árvores, o que contribui para organizar atividades lúdicas externas. No tocante à organização administrativa/pedagógica, as escolas dispõem de Regimento escolar, Projeto Político Pedagógico (PPP), Programa de Gestão escolar (PGE) e Colegiado escolar, elaborados e desenvolvidos pela tríade escola/família/comunidade. Os participantes deste estudo são 5 professores de matemática, sendo em sua maioria apenas graduados em matemática e apenas 2 professores com mestrado e 30 estudantes da segunda série do ensino integral.

As disciplinas distribuídas na parte pedagógicas são distribuídas da seguinte forma: disciplinas da BNCC e da parte diversificadas. Na disciplina da BNCC, são as disciplinas matemática, química, física, biologia, Língua portuguesa, língua inglesa, filosofia, arte, história e sociologia e a parte diversificada do currículo são: Eletivas, projeto de vida, estudo orientado, práticas experimental, empreendedorismos e protagonismos e tutoria.

A escola EEECI Mestre Júlio Sarmento selecionada para a realização da pesquisa apresenta o seguinte padrão: a escola de ensino médio cidadã integral está localizada do município de Sousa/PB/Brasil, pertencente a 10ª gerencia regional de ensino (GRE), do estado da paraíba, do sertão paraibano, que oferece ensino médio integral e a modalidade de Educação de Jovens e Adultos(EJA).

Composta por 500 alunos matriculados no ano corrente, 30 professores, 1 gestor, 1 coordenador pedagógico, 1 coordenador administrativos financeiro, 2 porteiros, 1 bibliotecária, 1 secretário, 2 cozinheiras e 2 auxiliares de serviços gerais. Além desses recursos, a escola é conduzida por apenas 1 diretor, um coordenador pedagógico e CAF.

Dos professores que constitui a escolas apenas 10 professores são efetivo e 20 são contratados. Quanto a formação dos docentes, um professor está cursando o doutorado em educação, três são mestres, todos são graduados e especialistas em sua área de atuação. Com renda que varia de 2 a 9 salários mínimos. A direção da escola é composta por um tri gestor (diretora, CP, CAF), ambos contratados e sem processos de eleição para escolha do gestor escolar

Com relação a estrutura física, a escola integral apresenta ambientes com boa iluminação. Os ambientes da escola são bem arejados e contam com salas providas de ar-condicionado, cuja distribuição é a seguinte: 1 sala de reunião de professores, 1 sala de informática com equipamentos tecnológicos, 1 biblioteca, 1 almoxarifado, 20 salas de aulas, 1 secretária, 1 sala de direção e 1 auditório. Os demais ambientes da escola são formados por 1 cozinha, 2 caixas de água, 1 banheiros de que atende a pessoas com deficiências, 2 banheiros para professores, 2 banheiros para os funcionários, 8 banheiros para estudantes, 1 lavatório para estudantes para limpeza rosto e higiene bucal e 1 rampa para pessoas com deficiências. Além disso, toda escola é amurada e de fácil acesso, pois localiza-se centro da cidade, próximo a 10º gerencia de ensino.

A escola ECI Dr. Silva Mariz selecionada para a realização da pesquisa apresenta o seguinte padrão: a escola de ensino médio cidadã integral está localizada do município de Marizóplois/PB/Brasil, pertencente a 10ª gerencia regional de ensino (GRE), do estado da paraíba, do sertão paraibano, que oferece ensino médio integral e a modalidade de Educação de Jovens e Adultos(EJA).

A escola é composta por alunos matriculados no ano corrente, 30 professores, 1 gestor, 1 coordenador pedagógico, 1 coordenador administrativos financeiro, 2 porteiros, 1 bibliotecária, 1 secretário, 2 cozinheiras e 2 auxiliares de serviços gerais. Já a EJA, esta é composta por 70 alunos e 8 professores. Além desses recursos, a escola é conduzida por apenas 1 diretor, um coordenador pedagógico e CAF.

Dos professores que constitui a escolas apenas 8 professores são efetivo e doze são contratados. Quanto a formação dos docentes, um professor está cursando o doutorado em educação, todos são graduados e especialistas em sua área de atuação. Com renda que varia de 2 a 9 salários mínimos. A direção da escola é composta por um tri gestor (diretora, CP, CAF), ambos contratados e sem processos de eleição para escolha do gestor escolar.

Com relação a estrutura física, a escola integral apresenta ambientes com boa iluminação. Os ambientes da escola são bem arejados e contam com salas providas de ventiladores, cuja distribuição é a seguinte: 1 sala de reunião de professores, 1 sala de informática com equipamentos tecnológicos, 1 biblioteca, 1 almoxarifado, 6 salas de aulas, 1 secretária, 1 sala de direção e 1 auditório. Os demais ambientes da escola são formados por 1 cozinha, 2 caixas de água, 1 banheiros de que atende a pessoas com deficiências, 3 banheiros para professores, 1 banheiros para os funcionários, 4 banheiros para estudantes, 1 lavatório para estudantes para limpeza rosto e higiene bucal e 1 rampa para pessoas com deficiências e 1 ginásio poli esportivo. Além disso, toda escola é amurada e de fácil acesso, pois localiza-se próxima a BR 230 que liga os municípios de Sousa e Cajazeiras passando em Marizópolis/PB/Brasil.

Já a Escola EEEFM Celson Mariz selecionada para a realização da pesquisa apresenta o seguinte padrão:

a escola de ensino médio cidadã integral está localizada do município de Sousa/PB/Brasil, pertencente a 10ª gerencia regional de ensino (GRE), do estado da paraíba, do sertão paraibano, que oferece ensino médio integral e a modalidade de Educação de Jovens e Adultos(EJA).

A escola é composta por 250 alunos matriculados no ano corrente, 15 professores, 1 gestor, 1 coordenador pedagógico, 1 coordenador administrativos financeiro, 2 porteiros, 1 bibliotecária, 1 secretário, 2 cozinheiras e 2 auxiliares de serviços gerais. Já a EJA, esta é composta por 30 alunos e 5 professores. Além desses recursos, a escola é conduzida por apenas 1 diretor, um coordenador pedagógico e CAF.

Dos professores que constitui a escolas apenas quatro professores são efetivo e onze são contratados. Quanto a formação dos docentes, um professor está cursando o doutorado em educação, todos são graduados e especialistas em sua área de atuação. Com renda que varia de 2 a 9 salários mínimos. A direção da escola é composta por um tri gestor (diretora, CP, CAF), ambos contratados e sem processos de eleição para escolha do gestor escolar.

Com relação a estrutura física, a escola integral apresenta ambientes com boa iluminação. Os ambientes da escola são bem arejados e contam com salas providas de ar-condicionado, cuja distribuição é a seguinte: 1 sala de reunião de professores, 1 sala de informática com equipamentos tecnológicos, 1 biblioteca, 1 almoxarifado, 10 salas de aulas, 1 secretária, 1 sala de direção e 1 auditório. Os demais ambientes da escola são formados por 1 cozinha, 2 caixas de água, 1 banheiros de que atende a pessoas com deficiências, 3 banheiros para professores, 1 banheiros para os funcionários, 4 banheiros para estudantes, 1 lavatório para estudantes para limpeza rosto e higiene bucal e 1 rampa para pessoas com deficiências e 1 ginásio poli esportivo.

Além disso, toda escola é amurada e de fácil acesso, pois localiza-se próxima a BR 230 que liga os municípios de Aparecida e Cajazeiras passando em Sousa/PB/Brasil.

A Lei nº 13.415/2017 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do ensino médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1.000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a oferta de diferentes possibilidades de escolhas aos estudantes, os itinerários formativos, com foco nas áreas de conhecimento e na formação técnica e profissional. A mudança tem como objetivos garantir a oferta de educação de qualidade a todos os jovens brasileiros e de aproximar as escolas à realidade dos estudantes de hoje, considerando as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade.

Instrumentos utilizados, questionamentos e análise de dados

Como a pesquisa foi realizada na escola pública do ensino básico do município de São Francisco/PB, utilizou-se como instrumentos para a coleta das informações estudo observacional descritivo, quando o pesquisador coleta dados da variável sem manipular, durante o período da pesquisa, descrevendo como os estudantes respondiam os problemas envolvendo ângulo entre os ponteiros de um, reações dos professores quando aplicadas a equação que atende as dificuldades encontradas no ensino de trigonometria.

Quanto ao instrumento para a entrevista, foi elaborado um questionário contendo os seguintes questionamentos sobre a temática a saber: Formação do professor; Identificação das principais dificuldades vivenciadas no ensino de trigonometria, ângulo entre os ponteiros de um relógio; Dificuldades nas conversões de medidas de graus; Dificuldades ao trabalharem com operações com ângulos; e as Estratégias didáticas para resolver problemas de ângulo entre os ponteiros de um relógio.

Além dessas variáveis, foram avaliados os principais desafios vivenciados pelos professores no ensino de trigonometria; Identificação das metodologias utilizados no ensino de matemática, para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio; Diagnóstico dos fatores positivos e negativos em relação ao ensino de Matemática; Como o ensino de matemática poderia ser melhor/diferente aplicando uma formula para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio; Diagnosticar como tem sido realizadas as atividades escolares dos estudantes; Aplicação dos testes com a formula antiga e com a nova. Quantos professores acertaram as questões, formula antiga. Utilizando a fórmula nova, quantos professores acertaram o problema; quanto tempo o professor levou para resolver o problema com a fórmula antiga e quanto tempo gastou para resolver o problema usando a fórmula nova?

Para os estudantes foram realizados os seguintes questionamentos: Quais as dificuldades na resolução de problemas de trigonometria; quantos estudantes acertaram a resolução do problema pelo método tradicional; Quantos estudantes acertaram a questão com o modelo matemático novo; Quanto tempo o estudante levou para resolver o problema tradicional e Quanto tempo o estudante levou para resolver o problema com a fórmula nova?

As questões das entrevistas foram feitas tomando como base os objetivos da pesquisa, escolhidos logo após a realização da revisão bibliográfica acerca do tema, realizada no Google acadêmico e Scielo. As entrevistas realizadas, foram ferramentas fundamentais para elucidar e responder os questionamentos realizados nesse trabalho de tese de doutorado. Além da descoberta científicas obtidas com a pesquisa de campo, a realização desse trabalho possibilitou a criação de mecanismos que permitiram o pesquisador ir além da coleta de dados; se auto avaliar, com o intuito de questionar, analisar e fazer a diferença na própria prática profissional.

Após a obtenção dos dados, os participantes ativaram suas respostas de forma presencial utilizando-se formulário como mecanismo de depósito de informações. Após a aquisição de todas as informações, estas foram analisadas e tratadas em termos percentuais, através de uma distribuição de probabilidade em gráficos de barras conforme a semelhança para a discussão dos resultados.

Visto que a pesquisa, envolve coleta de dados em seres humanos, assume caráter colaborativo entre o pesquisador e sujeitos da pesquisa, julgou-se necessário solicitar ao comitê de ética em pesquisa do centro da universidade (ACU) autorização para a realização do estudo (Anexo A). É importante ressaltar que os sujeitos foram informados sobre os objetivos de cada etapa da pesquisa, e que foi solicitado autorização para divulgação dos dados através de assinaturas de um termo de consentimento livre e esclarecido (Anexo B), assegurando-lhes através deste documento, sigilo profissional e ético.

Para realizar análise da amostra, será utilizado como ferramenta o Excel, baseado em uma amostra maior que 30, agrupando os dados em tabelas e gráficos de frequência absoluta e relativa e calcular seus parâmetros. "organizando em tabelas os dados brutos coletados, construindo gráficos para apresentar os resultados obtidos" (IEZZI, HAZZAH, DEGENSZAJN, 2013, p.73) durante a pesquisa. Análise será realizada em forma de percentual das variáveis analisadas ao resultado encontrada na pesquisa.

Capítulo 1

REFERENCIAL TEÓRICO

Atualmente, um dos temas que tem sido estudado na área de matemática tem sido sua atualização em termos da apresentação de novos produtos como modelos matemáticos aplicados com a função de faciliar o aprendizado. Além disso, novas ferramentas de trabalho foram incorporadas, a exemplo daquelas de cunho tecnológicos, cuja função tem sido a expansão do conhecimento e faciliddes na resoluçãao de problemas de difícil solução.

Nos últimos seis anos, foi posta em vigência no Brasil a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). De acordo Barreto (2020), pautado na leitura apresentada pelo Ministério da Educação (MEC), em 20 de dezembro de 2017 a BNCC foi homologada pelo ministro da Educação, Mendonça Filho. Assim, no mês de abril de 2017, o MEC entregou a versão final da BNCC ao Conselho Nacional de Educação (CNE), que por sua vez, elaborou o parecer e projeto de resolução sobre a BNCC, que foram encaminhados ao MEC. A partir da homologação da BNCC começou o processo de formação e capacitação dos professores e o apoio aos sistemas de Educação estaduais e municipais para a elaboração e adequação dos currículos escolares.

Uma das grandes mudanças registradas nos currículos foi a renovação do ensino de matemática. Para se ter uma ideia dessas inovações, a BNCC (p. 221, 2018), versa que o "conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais".

Pautados nesse discurso, a Matemática começou a ser vista como um divisor de águas, visto que sua função vai além do aprendizado que remete a resolução de problemas, mas funciona como um dos degraus que dá acesso dos sujeitos à cidadania, pois em uma sociedade cada vez mais fundamentada no desenvolvimento tecnológico, os conhecimentos matemáticos se tornam indispensáveis para as várias ações humanas, das mais simples até as mais complexas, tais como apreensão de dados em gráficos, efetivação de estimativas e percepção do espaço que nos cerca, dentre outras (BARRETO, 2020).

Segundo Mondini et al. (2019), relatam em seus estudos que a Matemática acadêmica exerce um papel fundamental no projeto da modernidade quer no que se refere à legitimação do conhecimento, quer na noção de Razão e de Lógica. Assim , os autores supracitados denominam a contemporaneidade como Revoluções Científicas, que instigaram a capacidade humana de investigar e decifrar os mistérios da natureza, e que teriam marcado o início da modernidade.

Assim, pesquisadores relatam em seus escritos que o fundamento da ciência moderna é, então, matemático, o que quer dizer que a experiência dos sentidos não se encontra na mira científica. Para tanto, a racionalidade moderna, que estrutura o que é ciência e diz o que não é, tem no cálculo, e nas previsões assertivas um modo produtor. Muito mais do que números, são as possibilidades de previsão e desenvolvimento que atestam o modo matemático de ser-fazer das coisas (MONDINI et al., 2019).

Como avanços da matemática na comtemporaneidade pode-se destacar o uso de ferramentas tecnológicas para a resolução de problemas. De acordo com Nascimento (2018), a aprendizagem com os dispositivos tecnológicos é algo novo no ambiente escolar, inclui-lo nas aulas de matemática como recurso pedagógico facilita os cálculos e permite transformar o modo de pensar e de construir o conhecimento. Além de oferecero desenvolvimento e o entendimento de conceitos e procedimentos matemáticos.

Diante do novo cenário apresentado nas últimas décadas, a capacidade da Educação voltada para a matemática se estabele em discutir os problemas sociais vigentes, em reagir aos problemas contemporâneos e em evidenciar as relações de poder econômico que influenciam a elaboração do currículo da Matemática. Sob cada um dos paradigmas de pensamento contemporâneo, Pereira et al. (2022), evidencia que a Educação Matemática tem contribuído muito mais como extensão das relações de poder do que como um instrumento dialógico de questionamento da realidade e de tratamento do conhecimento que discute a realidade do aprendiz não promovendo a alienação.

Alguns autores relatam que a Matemática não está ligada a nenhum conhecimento, de modo que a sua importância está no raciocínio ou insight sobre o qual é feita a descoberta de seus princípios. Desse modo, seu grande objetivo é que os próprios estudantes descubram as invenções dos matemáticos e a eles seja dado o modo de pensar que levaram os matemáticos a chegar a certas invenções e conclusões, instigando tanto os professores como aos estudantes, a capacidade de criar novos modelos matemáticos capazes de facilitar a resolução de problemas de difícil solução pelo senso comum.

A partir dos avanços observados na última década, a matemática se reveste com novas interpretações práticas para solucionar eventuais problemas do cotidiano. Assim, as escolas de Educação Básica devem estar preparadas para uma quebra de paradigma educacional na sua proposta metodológica de ensino de Matemática. Diante dessa realidade, faz-se necessário uma aprendizagem voltada para investigação e resolução de problemas, em que as atividades sugeridas tragam significação para o aluno. Portanto, a Resolução de Problemas é uma metodologia do ensino de Matemática por meio da qual o professor recomenda ao aluno-aprendiz situaçõesproblema evidenciadas pela construção de novos conceitos através de uma investigação (PONTES, 2018).

Assim, as estruturas matemáticas vêm a ter um papel na vida social tão fundamental quanto o das estruturas ideológicas na organização da realidade. É defendido que a matemática formal faz uma intervenção real. Isso significa que as discussões sobre os conteúdos de matemática devem serguiadas pela questão de serem ou não possíveis de esclarecer a real função dos métodos formais na sociedade. Para tanto, é importante ressaltar que a prática pedagógica do professor de matemática, direcionada pela matemática comtemporânea, é orientada em três tipos de saberes: Conhecer matemático, que se refere as competências matemáticas, tais como reprodução de teoremas, domínio de uma variedade de algoritmos, dentro outros. Conhecer tecnológico, que se refere às habilidades em aplicar a matemática e às competências na construção de modelos (VIEIRA & MOREIRA, 2020).

No tocante ao ensino-aprendizagem de matemática, o professor da atualidade precisa ter novas habilidades e competências profissionais. Deve estar consciente da necessidade de provocar a construção individual e coletiva do conhecimento, mediante questionamento sistemático. Assim, ao questionar, problematizar, conscientemente deve levar o aluno também aos seus próprios questionamentos, à reflexão e à construção de novas aprendizagens. Desta forma, o papel deste profissional deixa de ser o de simplesmente dar respostas, ou repassar conteúdos, afirmar certezas passando a ser o de criar dúvidas, fazer perguntas, levando o aluno também a pensar e a perguntar para si e para outros. De transmissor de conhecimento passa a mediador que instiga e acompanha enquanto o aluno constrói (OLIVEIRA & VAZ, 2014).

É nesse cenário que praticamos o ofício da pesquisa sobre as múltiplas facetas do educar matematicamente as novas gerações e os jovens e adultos que antes não tiveram acesso à escolarização. Além disso, estamos também envolvidos com processos educativos daqueles que seguem estudando, sempre estudando, para se preparar para "o futuro". E por falar em futuro é possível inferir as inovações realizadas pelo avanço da tecnologia e toda ciência em prol da produção de um novo conhecimento que poderá revolucionar o mundo. Assim, nossos alunos e nós professors e matemática nunca estamos suficientemente "formados", nunca terminamos de "nos formar", uma vez que tudo muda o tempo todo e que o mundo exige de cada um de nós a formualação de novos conceitos.

Na matemática existem modelos ou fórmulas que são utilizadas até a atualidade sem muito sucesso nas escolas. A partir da mudança de paradigmas na contemporaneidade, somos convidados a repensar sobre as nossas mtodologias de ensino e como é possível mudar a partir da criação de um novo modelo que facilite a resolução de problemas anteriormente vistos como de grande dificuldade de resolução.

A importância da resolução de problemas na matemática

A resolução de problemas na matemática é uma prática corriquira da disciplina. Entretanto, sua resolução e aprendizado dependem do desenvolvimento de fórmulas que poderão facilitar ou complicar ainda mais sua resolução. Assim, na comtemporaneidade, o desenvolvimento de novas fórmulas, juntamente com as ferramentas tecnológicas, têm contribuído significativamente com a simplificação dos problemas antes considerados pelos estudantes como o gargalo da matemática.

Para melhor compreensão dessa temática é importante inicialmente definir o significado da palavra problema na área da matemática. De acordo com Braga (2020), o termo problema está constantemente em utilização pelos professores de matemática, mas na maioria das vezes não vem acompanhado de uma reflexão a respeito de sua conceituação. Sua definição vai desde uma visão geral, do senso comum, como sinônimo de dificuldades e aperto, até as especificidades presentes no âmbito da matemática. Além disso, o autor supracitado acrescenta que a palavra problema é um termo imprescindível do vocabulário, linguagem e vivência do professor de matemática. Muitos até veem a matemática como um dos seus sinônimos por considerá-la algo muito difícil e pouco prazeroso.

Para Alvarenga et al. (2016) o termo problema pode ser definido como toda situação que tem por objetivo alcançar uma meta mediante estratégias, raciocínio lógico, modelagem e interpretação. Assim, um problema requer mais do que aplicação de fórmula ou de operações aprendidas nas aulas e passa a existir quando é indispensável interpretar, estruturar e contextualizar a situação.

Para tanto, compreender a essência da resolução de problemas, é necessário considerar quatro pontos importantes: o primeiro consiste em evidenciar apontamentos históricos desta abordagem; já o segundo advém da necessidade de identificar o que seria um possível problema. Por outro lado, o terceiro consiste em entender as etapas envolvidas em um processo de resolução; e, por fim, é necessário identificar suas abordagens, dando ênfase às que trabalham o problema como ponto de partida (MENDES et al., 2020).

A partir das concepções de problemas acima abordadas, entendemos que existe um problema quando há um objetivo a ser obtido e não se sabe como se atingir esse objetivo. Geralmente, o problema existe quando ainda não se tem resultado conhecido ou não, que pode ser solucionado utilizando-se a teoria matemática. Para tanto, ainda que outros fatores possam influenciar a forma como a resolução de problemas é desenvolvida em sala de aula, por exemplo, crenças e visões dos professores, da equipe de coordenação e direção, conhecimentos prévios dos alunos, aspectos sociais, políticos e culturais dos alunos da turma e da escola, influência dos pais e da família, entre outros, consideramos que o papel do professor e, em especial, dos materiais que são utilizados por ele têm alcance abrangente (ROSSETTO & BALIEIRO FILHO, 2020).

Pautados nesse contexto, Bueno e Millones (2017), relatam que a resolução de problemas matemáticos possui vários caminhos e os problemas em si não conduzem a uma única solução de caráter repetitivo, mas é uma possibilidade de raciocínio e ação, envolvendo muitas vezes o trabalho em equipe. Desse modo, a resolução de um problema matemático envolve além do desafio, o descobrimento, pois não existe um método rígido do qual o aluno possa sempre seguir para encontrar a solução de uma situação-problema, mas sim diversos caminhos, e estratégias, para se chegar a resolução.

Para a resolução de problemas, os estudantes necessitam identificar as variáveis e asincógnitas. Caso estas não estejam explícitas, procedimentos ou algoritmos serão necessários para determinar a solução do problema. Em algumas situações, faz-se necessário, somente, reordenar a apresentação das informações. No entanto, em outras situações mais complexas, resolver problemas implica em identificar informações e estabelecer relações entre conhecimentos linguísticos e matemáticos (MACHADOS & MATTOS, 2020).

No conceito de Monteiro et al. (2020), a Resolução de Problemas surge como uma nova metodologia, na qual os alunos começam a ser confrontados com um problema, o qual é o ponto de partida para a aprendizagem, enquanto no ensino tradicional os conceitos são introduzidos primeiramente para em seguida ser apresentado um problema de aplicação.

De acordo com a BNCC, a ideia da resolução de problemas trabalhada nas escolas traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos estão diante de situações desafiadoras, que devem ser resolvidas, e trabalham em conjunto para desenvolver estratégias de resolução.

Por outro lado, segundo a lógica dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, "o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema, visto que no processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; (BRASIL, 1997, p. 31)".

Assim, a concepção de Resolução de Problemas como método de ensino, pautada pelos PCN's, por vezes tem sido incorporada equivocadamente como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas, cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos (CARDOSO & OLIVEIRA, 2020).

A esse respeito, Marques e Amaral Filho (2020), ressaltam que o uso da resolução de problemas em sua prática vem sendo direcionado pelos PCN's, como uma proposta positiva no trabalho dos professores de matemática, visto que esse recurso seria adequado na exploração dos conteúdos matemáticos. Assim, para que a Matemática torne-se compreensível, é importante que o professor utilize recursos acessíveis ao aluno, que possibilitem identificar diferentes significados e conceitos matemáticos em diversas situações, trabalhando o conceito de resolução de problemas de forma contextualizada e contribuindo para uma aprendizagem significativa quanto suas soluções.

Diante dessas considerações, Santos et al. (2022) relatam que a importância da resolução de problemas no ensino da Matemática é notável e suas potencialidades têm sido ressaltadas como um dos caminhos para a melhor qualidade na construção do conhecimento, tanto pela BNCC quanto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) na educação básica.

Muitas destas recomendações já discutidas pela BNCC e PCN's, apontam para a importância da resolução de problemas no currículo, evidenciando sua validade nas últimas décadas. A essência da resolução de problemas continua a mesma, embora tem-se observados que o que tem mudado ao longo das décadas são as perspectivas de abordagem à resolução de problemas, e não a discussão sobre o seu valor. Assim, na contemporaneidade, a resolução de problemas não é apenas um movimento entre tantos que têm aparecido e desaparecido em educação matemática ao longo da história da matemática. Em vez disso, tem-se observado pela comunidade cientifica a sua aceitação como uma parte integrante do currículo de matemática (VALE, 2015).

A Resolução de Problemas surge como uma das alternativas para desmistificar a Matemática, fazendo com que o aluno confronte-se com seus conceitos e ideias, de maneira a contribuir com a sociedade, seja através de um cálculo para definir a quantidade de ferro para a contrução de um edifício de 10 andares, ou pelo simples fato de calcular quantas calorias o sujeito perderia se pecorresse 30 km de bicicleta uma vez por smana.

Portanto, a Resolução de Problemas está entre as capacidades e competências mínimas para a participação produtiva no século XXI, no qual os autores destacam sua importância para que os estudantes estejam preparados para conduzir e utilizar dados, em meio às exigências da sociedade contemporânea (PEREIRA et al., 2016).

Diante dessas considerações, é necessário que os conceitos e procedimentos matemáticos não sejam apenas apresentados aos alunos como se eles por si só conseguissem abstraí-los e, assim, conseguissem aplicá-los na “resolução de problemas” (PROENÇA et al., 2022).

Assim, como na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) consta a necessidade de levar os alunos a desenvolverem suas habilidades de resolução de problemas, visto que essa ação é possível não apenas se os problemas forem abordados, mas ainda se houver construção de conceitos em meio à perspectiva da resolução de problemas.

Contexto histórico do estudo de trigonometria

A trigonometria é um dos conteúdos da matemática que faz parte da BNCC, cuja importância deve-se a necessidade da resolução de problemas cotianos. É importante ressaltar que a Trigonometria na BNCC não aparece de modo explícito, mas articuladacom a Geometria. Por isso, nosso desafio é a partir de tais habilidades que foram citadas, articular com a prática desenvolvida em sala de aula, na busca de mobilizar conhecimentos trigonométricos (PEREIRA et al., 2021).

De acordo com Rodrigues et al. (2022), a palavra trigonometria surgiu por volta do ano de 1595, pelo matemático, astrônomo e teólogo Pitiscus (1561 - 1613), mas, historicamente, seus estudos estavam inseridos na área de Geometria por vários anos. Seu desenvolvimento no campo prática ocorreu em função da necessidade de contar, medir e desenhar.

De acordo com o coxtexto histórico da da trigonometria, sua origem está associda a astronomia. A Etiologia da palavra trigonometria compreende três radicais associados a saber: o radical tri significa três, o gonos refere-se a ângulos, e o termo metron significa o ato de medir. Assim, os estudos de triângulos envolvem em sua prática a determinação de medidas dos lados e ângulos de um triângulo para determinação da altura de edifícios (GALVÃO et al., 2016).

Traduzindo-se o significado de abrangência prática da Trigonometria, pode-se inferir que trata-se de um campo matemático que permite fazer cálculos em áreas como aquelas utilizados na Eletricidade (corrente alternada senoidal), Astronomia (medição da distância da Terra à Lua) e Engenharia Civil (medida da largura de um rio para construção de pontes), por exemplo (BERTOLI & SCHUHMACHER, 2013). Essa abrangência de utilidade na prática cotidiana tem aumentado consideravelmente a relevância de se estudar a trigonometria, visto que seu conhecimento proporciona aprendizagens capazes de subsidiar diversos usos dessa ferramenta Matemática em outros domínios escolares, acadêmicos e científicos.

Desse modo, o signicado de Trigonometria é medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da Matemática que estuda a relação entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. De acordo com a literatura matemática, a Trigonometria não foi obra de um homem só, nem de um povo só, sendo um conteúdo universal de grande utilidade prática para a construção (SILVA, 2019).

Em síntese, a Trigonometria é o estudo das relações das medidas dos lados de um triângulo e de seus ângulos. A trigonometria se classifica em: Triângulo e da circunferência. Na trigonometria do triangulo estuda-se as relações entre suas medidas e ângulos. Já na trigonometria do circulo estuda-se o ângulo, arcos e suas medidas. Sua importância está na construção civil encontrada na sociedade que vivemos, bem como nos estudos de relógios, na indústria de pneus, nos trabalhos cotidianos etc.

De acordo com a evolução histórica da humanidade, a Trigonometria sempre esteve presente no desenvolvimento matemático de diversos povos desde os primórdios das civilizações mais antigas. Segundo Silveira e Balieiro Filho (2013), os estudos de trigonométricos tiveram seus primeiros registros em rudimentos históricos no Egito e na Babilônia, datados 3000 a.C. e na China em aproximadamente 1110 a.C. Assim, o desenvolvimento da Trigonometria passou pela Grécia, pelo Egito, pela Índia e, com a expansão do islamismo (632 - 750), na região do Mediterrâneo (SILVA et al., 2019).

Conta a história que obras importantes como o papiro Cairo (3000 a.C.) e papiro Rhind (1650 a.C.) evidenciam que os povos antigos já possuíam conhecimento a respeito dos ângulos, relações trigonométricas e triângulos retângulos, de modo que os aplicavam em diversos contextos como: construção de pirâmides no Egito, medição de sombras do gnômon (relógio do Sol) determinação das horas do dia, cobranças de impostos visando o plantio em terras férteis às margens de rios importantes , a exemplo do rio Nilo, na divisão de terras, cálculos astronômicos, entre outras atividades realizadas (PITZER & FÁVERO, 2017).

Acompanhando os egípcios, no Oriente Antigo, os gregos contribuíram para um desenvolvimento significativo da Trigonometria. Assim, a Grécia atualmente é considerada como o berço da geração de diversos conhecimentos a respeito da trigonometria, com a contribuição de grandes nomes da Matemática, tais como: Tales de Mileto (nascido na cidade de Mileto na Ásia menor, atual Turquia, considerado o primeiro filósofo e um dos sete sábios da antiguidade) e Pitágoras (considerado como profeta e místico nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso próxima de Mileto, lugar onde nasceu Tales), registrados por volta do século VI a.c. (OLIVEIRA, 2021).

No que diz respeito aos conhecimentos desenvolvidos por esses dois pensadores gregos, pode-se destacar a sistematização referente à semelhança de triângulos definida a partir do Teorema de Tales de Mileto e a relação entre lados de um triângulo retângulo consolidado por Pitágoras e conhecida como Teorema de Pitágoras.

Outros matemáticos que influenciaram a trigonometria foram Aristarco de Samos, Erastóstenes, Hiparco (considerado o pai da trigonometria) e, Ptolomeu. Aristarco de Samos foi um astrônomo e matemático, que fez uma das conjecturas astronômicas mais ousadas da antiguidade, do século III a..C. na qual apresentava a Terra em movimento ao redor do Sol, sendo o primeiro a propor que o nosso Sistema Solar era heliocêntrico e não geocêntrico. Assim, a grande contribuição desse estudioso para a utilização da trigonometria foram os conhecimentos das relações do triângulo retângulo para determinar distancias muito grande, a exemplo da distancia da terra ao sol (LIMA & CHAQUIAM, 2020).

Com realçao a Erastóstenes, o matemático nasceu em Cirene ao norte da África atual Líbia por volta de 276 a.C., foi astrônomo, geógrafo, historiador, filosofo, e bibliotecário. Sua grande descoberta foi determinar o tamanho da terra. Sua principal contribuição com a trigonometria foi a descobertas do meio dia através de observações tendo como referencia o sol. Aém disso, ele descobriu a distancia do raio da terra e seu diametro usando os conhecimentos de trigonometria no triangulo e da circunferência (GOMES, 2013).

Outro matemático de grande importância para a história da trigonometria foi Hiparco de Nicéia, esse foi o matemático, e possivelmente, o mais notável dentre os astrônomos da antiguidade (180-125 a.C.). Seu grande feito foi a elaboração da primeira tabela trigonométrica da história, garantindo-lhe o direito de ser chamado de pai da trigonometria. A partir dessa tabela, Hiparco introduziu na trigonometria grega a divisão da circunferência em 360 partes cada uma delas sendo chamada de grau. Hiparco de Nicéia, contribuiu significativamente com o desenvolvimento de tabela trigonometrica com os conhecimentos de distancia da circunferência que não passa pelo centro as cordas (PEREIRA & MOREI, 2015).

Quanto ao Cláudio Ptolomeu (conhecido como

Ptolomeu de Alexandria) esse matemático foi o responsável pela obra trigonométrica mais importante da antiguidade denominada Syntaxis matemática (Síntese matemática), composta de 13 livros e que por sua consistência e elegância distinguiu-se das demais obras astronômicas e tornou-se muito influente no meio cientifico. O cálculo da distância da Terra à Lua Foi o método proposto por Ptolomeu para calcula a distância da Terra à Lua de forma muito simples, porém engenhoso. De maneira geral a contribuição desse matemático à trigonometria foi a criação de um teorema que levou seu nome para demonstrar que um retangulo inscrito em uma circunferência era propocional ao produto dos respectivos medidas de suas diagonais (OLIVEIRA, 2021).

Outro nome que contribuiu com a história da trigonometria foi Euclides. Apesar de serem raras as informações sobre ele, há alguns registros antigos que remetem as suas descobertas. O pouco que sabemos sobre Euclídes é através de Proclus (411 - 485): que relata sua existência no tempo de Ptolomeu I (que reinou no Egito de 306 a.C. até sua morte em 283 a.C.). Até o momento não se tem conhecimento correto do local de nascimento de Euclides, nem das datas de nascimento e morte. Podemos inferir através de Proclus que Euclides foi intermediário entre os primeiros alunos de Platão e Arquimedes.

No contexto histórico, Platão morreu em 347 AC, Arquimedes viveu de 287 a.C. – 212 AC e Erastosthenes .284 a.C. – 204 a.C. Seguindo essa linha de pensamento, Euclides deve ter vivido em torno de 300 AC, o que é compatível com o reinado de Ptolomeu I (306 a.C. – 283 a.C.). Atualmente, as datas mais concordes para o nascimento e morte de Euclides são 325 a.C. e 265 a.C. É muito provável que Euclides tenha recebido seu treinamento em matemática em Atenas, dos alunos da Academia de Platão e onde a maioria dos geômetras que poderiam ensiná-lo estava.

Conta a história que Euclides ensinou e fundou uma escola em Alexandria. Uma estória contada por Stobaeus, acentua o espírito eminentemente teórico e investigativo de Euclides em oposição ao sentido prático. Assim que terminou de ensinar seu primeiro teorema para um aluno iniciante em geometria, este lhe perguntou: mas o que eu vou ganhar aprendendo estas coisas? Euclides chama seu escravo e lhe diz dê-lhe três moedas, pois ele precisa ganhar alguma coisa com o que aprendera.

A obra de Euclides, denominada os Elementos de Euclides é constituída por 12 volumes. Dentre os volumes do livro que mais contribuíram com a matemática destacam-se os Livros I a IV, que tratam de geometria plana elementar. Estes são os os únicos que comparecem com alguns ensinamentos nos desenhos e croquis dos séculos XII e XIII, especialmente nos cadernos de Villard de Honnecourt (c. 1225-1235). Parte de propriedades elementares de retas e ângulos que vão conduzir à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao Teorema de Pitágoras (Livro I – proposição 47), à construção de um quadrado com área igual à de um retângulo dado, à secção áurea, ao círculo a aos polígonos regulares (SOUZA, 2019).

Menelau, outros grandes estudiosos da antiguidade, teve sua importante contribuição na história da trigonometria em 100 anos d.C., produzindo um trabalho sobre a trigonometria na circunferência e suas cordas, encontrados em seis livros, na versão árabe, em seguida, outra obra chamada de teorema de Menelau ideal para resolução de problemas em pontos colineares em uma mesma reta traçada de um dos lados de triangulo (SILVA, 2015)

Além dos autores citados acima, se destacaram na trigonometria do triângulo, nomes importantes na História da Trigonometria como: Fibonaci, Rhaeticus Purtisch, Regiontamus, Pitiscus, Isac Newton, Thales. O conhecimento do Matemático europeu do século XIII, o então Fibonaci que se destacou de (1170-1250) contribuindo para a trigonometria do triangulo retângulo com a sequência dos ternos aplicados a triangulo retângulo, o Regiontamus, destacou-se com trabalhos trigonométricos encontrados em tábuas publicado em Nuremberg em 1485 que trata das funções trigonométrica, Rhaeticus, com publicações em tábuas sobre as funções trigonométrica de (1514-1576) como sen.θ e cos θ aprimorando os trabalhos realizado por Jacques Bernoulli em 1702. Pitiscus, e seus triângulos esféricos publicado em 1619 em Edinburgh. Em 1658, período que John Newton e a divisão de ângulos em tábuas trigonométrica em uma obra chamada de ``Trigonometria Britannica`` publicada no período de (1622-1678). O famoso Thales matemático viveu na Grécia que deixou seu discípulo Pitágoras, que desenvolveu e demonstrou um dos mais famosos teoremas da matemática, ``O teorema de Pitágoras`` aplicados para resolver problemas de triângulos retângulos quando não conhecemos um de seus lados, surgindo depois em seus trabalhos o teorema fundamental da trigonometria (COSTA, 2022).

Dificuldades no ensino-aprendizado de trigonometria

O ensino-aprendizado de trigonometria tem apresentdo diversas dificuldades nos últimos anos, seja pelo fato do professor não ter o domínio pleno do conteúdo, ou pelas dificuldades quanto ao uso das fórmulas encontradas pelos estudantes.

Para se ter uma ideia da complexidade desse assunto, um estudo de pesquisa desenvovido com estudantes do ennsino médio do Distrito Federal evidenciaram que os alunos apresentam dificuldade em interpretar corretamente as razões trigonométricas, confundindo as razões seno e cosseno entre si, e em visualizar e/ou trabalhar com ângulos que não estão na base do triângulo (FEIJÓ, 2018).

Acerca das dificuldades na resolução de questões envolvendo a trigonometria, Pereira e Guerra (2016), utilizando um relato de uma pesquisa realizada em uma escola pública do município de Marechal Deodoro/AL com alunos do Ensino Médio, cujo objetivo principal era investigar as dificuldades e os efeitos de aprendizagem produzidos pela aplicação de uma determinada sequência didática sobre conceitos fundamentais da trigonometria, observaram que as maiores dificuldades na resolução de exercícios de trigonometria eram em conceituar e aplicar conteúdos básicos fundamentais que são necessários para sua evolução, tais como compreensão da aplicabilidade do teorema de Pitágoras e aplicação da regra de três simples.

Utilizando a tecnologia como recurso metodológico para facilitar a resolução de exercícios de trigonometria, Oliveira e Fernandes (2010) objetivando investigar a eficiência de estratégias pedagógicas com tecnologias na construção significativa do conhecimento sobre conceitos iniciais de trigonometria, e, de forma mais específica, sobre seno e cosseno. Para este fim, foram utilizados dois instrumentos distintos, sendo o primeiro com o uso de tecnologias "tradicionais" como o lápis, régua, transferidor e o segundo com o uso de tecnologias digitais, tendo como interface o software Geogebra. A pesquisa foi feita com 12 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Guaratinguetá, interior de São Paulo e a base teórica foi a teoria da Aprendizagem Significativa. As principais dificuldades que os alunos apresentaram foram acerca da utilização de instrumentos tecnológicos tradicionais, em especial o transferidor, para a construção do ciclo trigonométrico. De acordo os autores supracitados, uma das principais dificuldades foi o fato dos alunos não lembrarem ou não sabiam como utilizar essas ferramentas.

Seguindo essa tendência, Sobrinho (2015) aplicando atividades em sala de aula para avaliar as dificuldades dos estudantes quanto a resolução de problemas trigonométricos, utilizando uma metodologia baseada na Técnica de Resolução de Problemas, concluiu que inicialmente os alunos apresentaram bastante dificuldade em interpretação de problemas envolvendo razões trigonométricas e que não lembravam de suas definições. Entretanto, quando os mesmos começaram a utilizar a metodologia proposta pelo professor (resolução de problemas reais), esses conseguiram identificar e resolver as questões propostas. Segundo o autor supracitado, ao trabalhar com problemas práticos, os alunos apresentaram um maior envolvimento com o trabalho de sala de aula e melhoraram a compreensão dos conceitos estudados.

Objetivando avaliar as dificuldades apresentadas no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria em sala de aula, Medeiros (2012) as dificuldades podem ser explicadas por bloqueios de natureza variada, ou seja, geométrico, algébrico ou aritmético. Segundo o autor supracitado, nenhuma das dificuldades apontadas aparecem sozinhas. As principais dificuldades, constatadas foram: Leitura e interpretação dos enunciados das questões propostas até a manipulação de técnicas algébricas para construir conceitos trigonométricos, manuseio de instrumentos como réguas, construção de triângulos e resolução de questões com o uso do Teorema de Pitágoras. Ela ainda destaca que para um ensino e aprendizagem efetiva desse conteúdo é necessário compreender e dominar conceitos geométricos abordados na sequência de ensino. Conciente dessa constatação, o autor desenvolveu uma sequência de atividades objetivando apoiar os professores e alunos na elaboração de conceitos voltados para o ensino e aprendizagem da trigonometria. Como resultado, o autor constatou melhoria no aprendizado dos estudantes do ensino médio quanto aos conteúdos dentro de conceitos geométricos.

Pautados nessa discussão, Souza et al. (2014), tendo por objetivo investigar como a História da Trigonometria pode se constituir como elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno, por parte de estudantes do ensino médio. Foi feita uma atividade pedagógica com 21 alunos, do primeiro ano do ensino médio, de uma escola pública federal, localizada no município de Nilópolis/RJ, em que a coleta de dados foi um questionário. Os resultados da pesquisa evidenciaram que alguns alunos responderam que essa reconstrução histórica feita pelos pesquisadores não teve tanta relevância para o aprendizado de trigonometria. Os pesquisadores notaram que os alunos estavam mais preocupados com a resolução das questões do que em aprender conceitos fundamentais que envolvem as funções seno e cosseno.

Estudos conduzidos por Trevisan e Buriasco (2016), utilizando alguns testes para verificar os conhecimentos de trigonometria, através de uma prova em fases com alunos do segundo ano do ensino médio, cujas questões dessa prova em fase foram tiradas de livros didáticos e provas anteriores, propiciando aos estudantes resolvê-las ao longo de um semestre. Os autores observaram que praticamente todas as questões propostas eram limitadas à memorização e reprodução de algoritmos. questões que contemplam apenas memorização prejudicará o aprendizado do aluno, permitindo concluir que mesmo que nos livros didáticos aparecem poucas questões que instigue os alunos a problematizar, existem outros recursos didáticos para subsidiar a atividade do professor.

Ao analisar as dificuldades observadas ao longo da construção dessa tese, percebe-se que muitas delas estão relacionadas as metodologias utilizadas em sala de aula e a forma como o conteúdo é apresentado pelo professor. Ao analisar as pesquisas desenvolvidas pelos estudiosos de trigonometria, percebe-se que é possível trabalhar a trigonometria de forma interativa, levando em consideração os saberes prévios dos estudantes e as dificuldades dos mesmos. Assim, o professor deve adotar e/ou criar uma metodologia que facilite o aprendizado e possibilite reduzir as dificuldades apresentadas pelos alunos a fim de proporcionar correções necessárias no processo de assimilação, obtendo-se resultados promissores no ensino aprendizagem de trigonometria.

Ensino Tradicional da Trigonometria baseado na teoria do Relógio (Trigonometria da circunferência).

Desde a antiguidade, que o homem busca alternativas para resolver seus problemas e satisfazer suas necessidades básicas. Asim, foi necessário planeja todas as suas atividades com base em figuras imaginárias que foram tomando forma ao longo do tempo com reflexos na construção de instrumentos que o poderiam auxiliar.

Assim, começaram a ser desenvolvidos alguns artrfatos que poderiam servir para comunicação e desenvolver sua linguagem, resultando na elaboração de elaboração de meios mais eficazes para transmitir os conhecimentos.

Um dos artefatos criados pelo home para auxiliar o desenvolvimento do ensino-aprendizado de matamática foi o livrolivro História da Matemática em atividades didáticas, no qual Mendes (2005), apresenta alguns artefatos que foram utilizados para abordar conteúdos relacionados a noção de proporcionalidade e semelhança de triângulos retângulos, como também as noções de trigonometria. Entre as atividades propostas contemplava a construção e exploração de uma réplica do relógio de sol. Segundo o autor:

> Os aspectos históricos apresentados nesta atividade tem um caráter provocador para as estudantes, tendo em vista lançar-lhesvários desafios, dentre os quais podemos citar: uma pesquisa mais detalhada acerca dos relógios de sol; um estudo acerca das modificações realizadas na técnica de medir o tempo até chegar aos relógios atuais; um estudo sobre a trigonometria relacionada aos relógios de sol; uma investigação acerca da exploração dessas ideias por diferentes grupos culturais, etc. (MENDES, 2005, p. 69).

O uso de artefatos foi incorporado nas atividades de ensino destacadas nestas experiências expostas no texto. Nestas atividades foram enfatizadas a participação ativa do aluno na construção do seu conhecimento matemático, refletindo sobre a ação que está sendo realizada, bem como a ampliação do conhecimento do professor na busca de alternativas metodológicas para explorar os conteúdos matemáticos em sala de aula. Dessa forma, consideramos que o uso de artefatos históricos e o seu manuseio, como o relógio, provavelmente, promoverá reflexões e estímulos para que os professores possam criar seus próprios artefatos, como também oferecer pistas de articulação com outras áreas do conhecimento (OLIVEIRA, 2017).

Comumente o ensino de trigonometria trabalhado em sala de aula, na educação básica brasileira, principalmente na segunda série do ensino médio, tem sido pela utilização do artefato do relógio, que se baseia no cálculo do menor ângulo entre os ponteiros de um relógio através da técnicas de regra de três simples com abordagem no ângulo central utilizando as relação de grau e ângulo. Esse método prevaleceu no ensino até a contemporaneidade (SILVA, 2022), conforme pode-se observar nos exemplos a seguir:

Exemplo1: Encontre o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio quando marca exatamente 1h:00
Vejam que temos 1h e 0 minutos

RESOLVENDO AS QUESTÕES

Técnica: regra de três simples.

Cálculo do ângulo α

Minutos graus

60 ______________ 30
0 ______________ β

$\frac{60}{0}=\frac{30}{\beta}$ $60\beta = 0.30$

$\beta \frac{0}{60}$ β

O ponteiro dos minutos deslocou-se apenas 30º.
Logo, α = 30º - β = 30º - 0º = 30º

Exemplo2: Encontre o menor angulo entre os ponteiros de um relógio quando marca exatamente 1h:20 minutos
Vejam que temos 1h e 20 minutos

RESOLVENDO AS QUESTÕES

Técnica: regra de três simples.

Cálculo do ângulo α

Minutos graus

60 ______________ 30
20 ______________ β

$\frac{60}{20}=\frac{30}{\beta}$ $60\beta = 20.30$

$\beta \frac{600}{60}$ β

O deslocamento do ponteiro dos minutos em relação a hora foi de 90º.

Logo, α = 90º - β = 90º - 10º = 80º
Podemos perceber que a utilização da metodologia inovadora de ensino torna-se mais prático e eficiente o processo de encontrar o ângulo α

Exemplo3: Encontre o menor angulo entre os ponteiros de um relógio quando marca Vejam que temos 3h e 40 minutos

RESOLVENDO AS QUESTÕES

Técnica: regra de três simples.

Cálculo do ângulo α

Minutos graus

60 ____________ 30

40 ____________ β

$\frac{60}{40} = \frac{30}{\beta}$ $60\beta = 40.30$

β $\frac{1200}{60}$ β

O deslocamento do ponteiro dos minutos em relação a hora foi de 150º.

Logo, α = 150º - β = 150º - 20º = 130º

Exemplo4: Encontre o menor angulo entre os ponteiros de um relógio quando marca exatamente 3h:25 minutos

RESOLVENDO AS QUESTÕES

Método tradicional simples.

Cálculo do ângulo α

Minutos graus

60 ____________ 30

25 ____________ β

$\frac{60}{25} = \frac{30}{\beta}$ $60\beta = 25.30$

β $\frac{750}{60}$ β 12,5º

Vejam que quando não temos valores exatos precisamos de realizar algumas conversões estabelecidas nas propriedades citadas acima.

Como 0,5º=30`

1`= 60`` (um minuto é igual a sessenta segundos)

1º=60`(um grau é igual a sessenta minutos)

β

Como o ponteiro dos minutos percorreu 25 minutos equivale a 150º
Logo, α = 150º - β = 120º - 12º30\` = 119º60\` - 12º30\`=107º30\`
Outra conversão foi preciso realizar:
120º= retirando um grau e transformando em minutos=119º60\`
1º=60\`

De acordo com a resolução das questões, observa-se que essa prática fica cada vez mais burocrática e tornando difícil de compreensão para os estudantes. Com a aplicação da equação inovadora torna-se mais prático e eliminando as dificuldades encontradas na prática de resolução de problema de trigonometria do relógio. Isso acontece nos exemplos seguintes. Diante dessa prática do cálculo do ângulo entre os ponteiros de um relógio sempre vai aparecendo conversões necessárias para encontrar esse ângulo.

Outra metodologia utilizada na literatura tem sido a de Euclides. Essa metodologia objetiva resolver questões de ângulo entre os ponteiros de um relógio.

Exemplo: Qual o ângulo entre os ponteiros de um relógio quando marca exatamente 12h20min?

RESOLVENDO AS QUESTÕES

Método de Euclides

Cálculo do ângulo α

$H \quad 12\,H$

M= 20 Minutos

α =I 30xh – 0,5 x m I

α =I 30x12 – 0,5 x 20 I

α =I 360 – 10 I

α =I 350I

α =350º

De acordo com o resultados percebe-se que essa solução não é verdadeira.

Assim, necessitamos realizar o confronto com método tradicional.

.

Resolvendo a questão pelo método tradicional utilizado nas escolas

Cálculo do ângulo α

Minutos	--------------	graus
60	___________	30
20	___________	β

$\frac{60}{20}=\frac{30}{\beta}$ $\quad 60\beta = 20.30 \quad \beta \ \frac{600}{60} \quad \beta$

Como o ponteiro dos minutos percorreu 20 minutos equivale a 120º

Logo, α = 120º - β = 120º - 10º = 110º

Na equação de ``Euclides este exemplo não possuía solução como mostra a resolução: →

$\alpha \qquad - 0{,}5\ .M\ \mathrm{I}$

$\alpha \qquad - 0{,}5 \times 20\ \mathrm{I}$

$\alpha \qquad - 10\ \mathrm{I}$

α

α

Vejam que a equação de ``Euclides `` não produziu uma solução. Muita variabilidade em relação a solução exta. Isso acontece porque o mesmo não estabeleceu um sistema de numeração válido para estrutura do relógio.

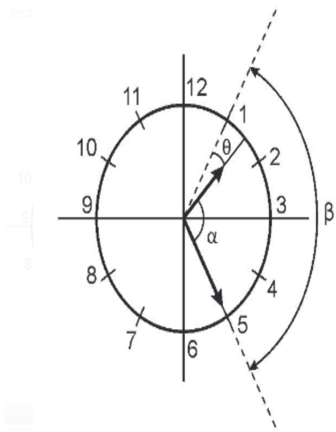
Os resultados mostram que quando o ponteiro do relógio da hora chega em doze horas, um deslocamento de estrutura do sistema de horas, pois, zera e se inicia um novo ciclo de formação de ângulo entre os ponteiros do relógio. Tomado como base no sistema de numeração decimal de base 10. Além disso, temos que observar que na formatação de horas e minutos não existe 60 segundos e nem 60 minutos. Portanto, esses valores são convertidos para minutos e horas. Como essa prática de ensino encontrada em sala de aula, torne-se um problema na produção de conhecimento vivenciados em sala de aula no ensino em todo Brasil. O que chamamos de: O problema de Euclides.

Outro método utilizado para encontrar o ângulo e resolver os problemas de trigonometria foi o Sistema de operação do relógio. Esse método foi desenvolvido apartir de um sistema de observação no relógio, com nosso sistemeta de numeração decimal de base e o sistema Internacional de medidas para realizasões das conversões necessárias para validação da equação.

O sistema utilizado no relógio, baseia em mensurar as horas de acordo com a hora estabelecida para utilização da fórmula desenvolvida nesta tese comporta da seguinte maneira:

Para as horas vamos utilizar o seguinte sistema H= 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 formando as 12 partes iguais do ponteiro da hora relógio. Assim temos:	
0h= são 12 horas	1h= uma hora
2h= Duas horas	3h=três horas
4h= quatro horas	5h= cinco horas
6h= seis horas	7h= sete horas
8h= oito horas	9h=nove horas
10h=dez horas	11h= onze horas
Para os minutos vamos utilizar o seguinte sistema M= 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 ……….,59 formando as 60 partes iguais da circunferência do relógio do ponteiro do minuto. Assim lemos:	
1min= um minuto	2min= dois minutos

Este sistema se baseia na forma de deslocamentos dos ponteiros do relógio. Quando o ponteiro da hora realiza a primeira volta e chega as 12 horas, significa que o movimento vai se inicia novamente, por este motivo a hora de 12horas será designada de 0 horas. Isso acontece também com o ponteiro do minuto. Quando realiza a primeira volta e chega na posição 59 minutos e passa para os 60 segundos, inicia um novo ciclo e por isso há um deslocamento do ponteiro da hora para o número seguinte e o do minuto passa para zero.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\alpha = \beta + \frac{m}{2} - \vartheta$.
onde,
β =h.30º, o ângulo formado pelo deslocamento a cada hora é proporcional a 30º.
$\frac{m}{}$ no deslocamento de cada minuto o ponteiro dos minutos corresponde $\frac{m}{}$ graus
$\vartheta = \frac{12}{1} \times \frac{m}{}$, proporcionalidade da hora em relação ao deslocamento dos minutos, de unidades graus</td>
</tr>
<tr>
<td>β =h.30º, o ângulo formado pelo deslocamento a cada hora é proporcional a 30º.</td>
<td>$\frac{m}{}$ no deslocamento de cada minuto o ponteiro dos minutos corresponde $\frac{m}{}$ graus.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\vartheta = \frac{12}{1} \times \frac{m}{}$, proporcionalidade da hora em relação ao deslocamento dos minutos, de unidades graus</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Substituindo na equação:</td>
</tr>
<tr>
<td>$\alpha = \beta + \frac{m}{2} - \vartheta$</td>
<td>$\alpha = 30h + \frac{m}{} - \frac{12m}{}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\alpha = \left|\frac{60h-11m}{}\right|$</td>
<td>onde:
h= quantidade de horas;
m=quantidade de minutos
α= ângulo entre os ponteiros de um relógio</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Propriedades utilizadas para o cálculo do ângulo:
I. A unidade de α é graus;
II. Em cada hora o ponteiro das horas se desloca 30º, porque a circunferência equivale a 360º e dividida em 12 partes iguais, cada parte vale 30º;
III. A cada minutos o ponteiros dos minutos se desloca $\frac{m}{}$ ^{0}graus.</td>
</tr>
</table>

IV. $|\alpha|$, o módulo será sempre utilizado para tornar o ângulo positivo;

V. O relógio contém 12 partes iguais.

VI. 1º é igual a 60 minutos (1º=60`);

VII. 1 minuto é igual a sessenta segundos (1`=60``)

Para melhor entendimento a respeito desse conteúdo é importante revisar todas as fórmulas disponíveis da literatura e suas bases de origem. Iniciaremos com o surgimento da fórmula do relógio, relatando inicialmente seu conceito.

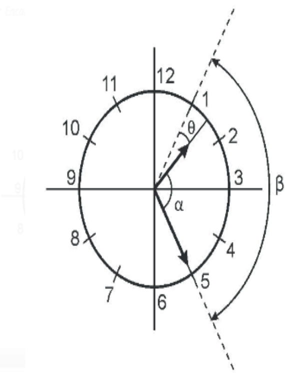
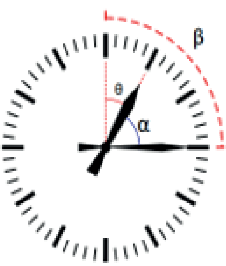
O Relógio é um Instrumento utilizado para verificação da hora, minutos e segundos por meio de observação da posição dos ponteiros. Neste estudo vamos utilizar o relógio analógico: aquele que marca o tempo por meio de ponteiros que giram em um mostrador com números; relógio anadígito, lembrado que são três os ponteiros do relógio. Não vamos levar em consideração o tamanho dos ponteiros, mas sim, sua marcação da hora e minutos. Por outro lado, a Velocidade dos ponteiros corresponde a velocidade dos ponteiros está relacionada com o ângulo central e não com a distância linear dos ponteiros. O que queremos encontra o valor do ângulo que fica entre os ponteiros do relógio da hora e minuto. Já o Arco entre os ponteiros de um relógio observado neste estudo é proporcional ao deslocamento do ponteiro dos minutos em relação ao da hora, ou seja, h.30º.

Nesta demonstração vamos utilizar a indução matemática para demonstrar a seguinte equação:

Demonstração da Equação 1- Indução Matemática A utilização do módulo na equação será justamente para obtemos resultados positivos.	
$\alpha = \left\| \frac{(60H \quad 11M)^\circ}{2} \right\|$	onde H ≤ 11 e M ≤ 59 sendo H e M ∈ N
Observação: Os módulos utilizados na equação, tornar a medida de ângulo positiva. Base: Se vale para H=1 e M = 1	
$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\|$	$\leftrightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.1-11.1)^\circ}{2} \right\|$
$\leftrightarrow \alpha = \frac{49^\circ}{2}$	
Hipótese: Funciona para h=k e m=k`	
$\alpha = \left\| \frac{(60.k \quad 11.k`)^\circ}{2} \right\|$	Tese: Funcionará para H=k +1 e M =k`+ 1, onde K e K`∈ IN
$\alpha = \left\| \frac{(60.h-11.m)}{2} \right\|$	$\rightarrow \alpha = \left\| \frac{60.(k \quad 1)-11.(k+1) \quad ^\circ}{2} \right\|$
$\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60k \quad 60-11k-11)^\circ}{2} \right\|$	$\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60k \quad 11k+60-11))^\circ}{2} \right\|$

$\rightarrow \alpha = \left|\frac{(\;60k \quad 11k \;\; + 60-11\;)^\circ}{2}\right|$	$\rightarrow \alpha = \left|\frac{60k \quad 11k}{2}^\circ + \frac{60-11}{2}\right|$
$\rightarrow \alpha = k + 1$	$\leftrightarrow \alpha = k + 1$
Logo, fica claro se vale para k, também vale para K +1.	

Após essa demonstração, seguimos para a demonstração 2 para verificar sua eficácia.

Demonstração da Equação 2	
	$\alpha + \theta = \beta \rightarrow \alpha = \beta - \theta$, β é conhecido e M também. onde, α= Menor ângulo entre os ponteiros de um relógio, β=ângulo do arco deslocamento do ponteiro dos minutos, M = quantidades de minutos. $\theta = M/2$ 0,5º = 30\` (meio grau equivalente a 30 minutos) $\alpha = \beta - \frac{M}{2}$
 $\alpha = \beta - \theta$ $\alpha = \beta - \frac{30^\circ M}{60}$ $\alpha = \beta - \frac{M}{2}$	$\alpha = 90^\circ - \frac{15}{2}$ $\alpha = 90^\circ - 7{,}5$ $\alpha = 90^\circ - 7^\circ 30'$

α = 89º60´ - 7º30´	α = 82º30`
Observação: Utilizamos várias conversões neste exemplo como: 1º=60` minutos e 0,5º = 30`minutos.	
Exemplo1: Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca na figura abaixo:  *Solução*	
Como a circunferência trigonométrica corresponde a 360º, então temos 12 partes iguais de 30º.	
β=180º (o ponteiro dos minutos se deslocou da posição até 6, ou seja, 6 partes de 30º)	M=30 Substituindo na equação: $\alpha = \beta - \frac{M}{2}$ $\alpha = 180º - \frac{30}{2}$ α = 180º - 15º α =175º

A seguir apresentamos o Ângulo Formado pelos ponteiros de um relógio

Metodologia da observação
Quando trabalhamos com horas exatas Definição: Como a circunferência é dividida em 12 partes iguais, então $\frac{360}{12}$ é igual a 30º. Para saber o ângulo entre os ponteiros de um relógio neste caso, basta observar quantas deslocamento se dos ponteiros dos minutos em relação ao da hora. Vejamos alguns exemplos abaixo:

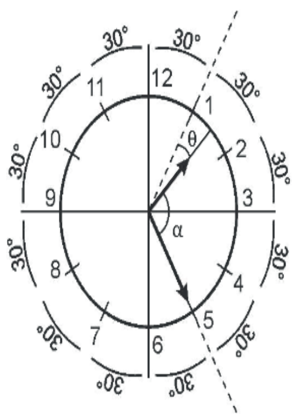
Resolução de exemplos aplicados no ensino médio

Exemplo 1: Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca:

a)1h:00 min

Primeira solução:

Veja que neste caso não precisamos utilizar a fórmula e se observar quantos deslocamento se deu os ponteiros dos minutos. Veja que quando marca 1h podemos observar que tem 30º.



Vejamos que H= 1 e M =0,
Substituindo na equação temos:..........→

$\alpha = \left| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right| \quad \rightarrow \alpha = \left| \frac{(60.1 - 11.0)^\circ}{2} \right|$

$\rightarrow \alpha = \left| \frac{(60 - 0)^\circ}{2} \right| \quad \rightarrow \alpha = \left| \frac{60^\circ}{2} \right|$

	$\rightarrow \alpha = 30°$ Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 30º

Metodologia da observação

Quando trabalhamos com horas exatas

Definição: Como a circunferência é dividida em 12 partes iguais, então $\frac{360}{12}$ é igual a 30º. Para saber o ângulo entre os ponteiros de um relógio neste caso, basta observar quantas deslocamento se dos ponteiros dos minutos em relação ao da hora. Vejamos alguns exemplos abaixo:

Resolução de exemplos aplicados no ensino médio

Exemplo 1: Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca:

a)1h:00 min

Primeira solução:

Veja que neste caso não precisamos utilizar a fórmula e se observar quantos deslocamento se deu os ponteiros dos minutos. Veja que quando marca 1h podemos observar que tem 30º.

Vejamos que H= 1 e M =0, Substituindo na equação temos:..........→	α =$\lvert\frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2}\rvert$ →α =$\lvert\frac{(60.1-11.0)^\circ}{2}\rvert$ →α =$\lvert\frac{(60-0)^\circ}{2}\rvert$ →α =$\lvert\frac{60^\circ}{2}\rvert$ →α = 30° Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 30º

Método tradicional de ensino encontrado em sala de aula. ***Aplicação da regra de três simples.***	
Cálculo do ângulo α	
Minutos graus 60 ______ 30 0 ______ β $\frac{60}{0}=\frac{30}{\beta}$ 60β =0.30 β $\frac{0}{60}$ β	O ponteiro dos minutos deslocou-se apenas 30º. Logo, α = 30º - β = 30º - 0º = 30º Podemos perceber que a utilização da metodologia inovadora de ensino torna-se mais prático e eficiente o processo de encontrar o ângulo α
b) 2h:00min	
Vejamos que H= 2 e M =0, substituindo na equação temos:	
α =$\lvert\frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2}\rvert$	→α =$\lvert\frac{(60.2-11.0)^\circ}{2}\rvert$
→α =$\lvert\frac{(120-0)^\circ}{2}\rvert$	→α =$\lvert\frac{120^\circ}{2}\rvert$

$\rightarrow \alpha = 60^\circ$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 60º.

Método tradicional de ensino encontrado em sala de aula.

Método tradicional de ensino.

Cálculo do ângulo α

Minutos graus 60 ———— 30 0 ———— β $\frac{60}{0} = \frac{30}{\beta}$ $60\beta = 0.30$ $\beta = \frac{0}{60}$ β β	O ponteiro dos minutos deslocou-se apenas 60º. Logo, α = 60º - β = 60º - 0º = 60º Podemos perceber que a utilização da metodologia inovadora de ensino torna-se mais prático e eficiente o processo de encontrar o ângulo α

c)3h:00 min

Vejamos que H= 3 e M =0, substituindo na equação temos:

$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.3 - 11.0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(180 - 0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{180^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = 90^\circ$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 120º

d) 4h:00 min

Vejamos que H= 4 e M =0, substituindo na equação temos:

$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.4 - 11.0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(240 - 0)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{240^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = 120º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 120º

e)5h:00 min

Vejamos que H= 5 e M =0, substituindo na equação temos:

$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.5 - 11.0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(300 - 0)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{300^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = 150º$	Logo, o menor ângulo entre os ponteiros é de 150º

f) 6h:00min	
Vejamos que H= 6 e M =0, substituindo na equação temos:	
$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.6-11.0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(360-0)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{360^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = 180º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 180º
g)7h:00min	
Vejamos que H= 7 e M =0, substituindo na equação temos:	
$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.7-11.0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(420-0)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{420^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = 210º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 210º
h)8h:00 min	
Vejamos que H= 8 e M =0, substituindo na equação temos:	
$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.8-11.0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(480-0)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{480^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = 240º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 240º
i)9h:00 min	
Vejamos que H= 9 e M =0, substituindo na equação temos:	
$\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.9-11.0)^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(540-0)^\circ}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{540^\circ}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = 270º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 270º
j)10h:00 min	
Vejamos que H= 10 e M =0, substituindo na equação temos:	

$\alpha = \left\vert \frac{(60.H\ \ 11.M)^\circ}{2} \right\vert \rightarrow \alpha = \left\vert \frac{(60.10-11.0)^\circ}{2} \right\vert 0$ $\rightarrow \alpha = \left\vert \frac{(600-0)^\circ}{2} \right\vert \rightarrow \alpha = \left\vert \frac{600^\circ}{2} \right\vert$ $\rightarrow \alpha = 300º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 300º

k)11h:00 min	
Vejamos que H= 11 e M =0, substituindo na equação temos:	
$\alpha = \left\vert \frac{(60.H\ \ 11.M)^\circ}{2} \right\vert \rightarrow \alpha = \left\vert \frac{(60.11-11.0)^\circ}{2} \right\vert$ $\rightarrow \alpha = \left\vert \frac{(660-0)^\circ}{2} \right\vert \rightarrow \alpha = \frac{660^\circ}{2}$ $\rightarrow \alpha = 330º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 330º
l) **12h:00 min**	
Vejamos que H= 12 e M =0, substituindo na equação temos:	
$\alpha = \left\vert \frac{(60.H\ \ 11.M)^\circ}{2} \right\vert \rightarrow \alpha = \left\vert \frac{(60.12-11.0)^\circ}{2} \right\vert$ $\rightarrow \alpha = \left\vert \frac{(720-0)^\circ}{2} \right\vert \rightarrow \alpha = \frac{720^\circ}{2}$ $\rightarrow \alpha = 360º$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 360º
Vejamos, que neste tipo de exemplos quando temos horas exatas basta dividir a circunferência em 12 partes iguais e observamos entre cada horas é equivalente a 30º.	

Capítulo 2

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este item está dividido em dois blocos. No primeiro bloco é apresentado a criação de um modelo matemático que foi criado há aproximadamente 20 anos em sigilo, entretanto sua divulgação no meio científico só foi possível nos últimos 3 anos, visto que esse tema seria o título da tese do autor da referida obra.

No segundo bloco será discutida as dificuldades apresentadas por professores e estudantes quanto a resolução de problemas de trigonometria envolvendo o modelo matemático usado tradicionalmente e o modelo novo criado pelo autor, apresentada no primeiro bloco desse trabalho de tese.

Metodologia inovadora de ensino (Produção de um novo modelo matemático)

O item a seguir apresentará o passo a passo do desenvolvimento da fórmula e sua aplicação em sala de aula para estudantes do ensino médio, especificamente, o segundo ano do ensino médio.

Para iniciarmos a apresentação dos resultados de nossa pesquisa, é necessário apresentar a formulação de um modelo matemático prático, simples e de grande utilidade que objetiva reduzir o nível de dificuldades dos estudantes e professores quanto a resolução dos problemas de trigonometria.

Para melhor compreensão da criação e utilização do novo modelo matemático, optou-se pelo uso de esquemas de apresentação em caixas de textos.

Se caso devemos utilizar a equação $\boldsymbol{\alpha} = \left| \frac{(60H \quad 11M)^\circ}{2} \right|$ para resolver estes problemas envolvendo horas qualquer.	
Resolução de exemplos aplicados no ensino médio com o novo modelo	
Exemplo : Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca:	
a)13h:25 min	
Vejamos que H= 1 e M =25, substituindo na equação temos: $\alpha = \left| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right|$ $\alpha = \left| \frac{(60.1 - 11.25)^\circ}{2} \right|$ $\alpha = \left| \frac{(60 - 275)^\circ}{2} \right|$ $\alpha = \frac{215^\circ}{2}$ $\alpha = 107^\circ 30'$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 107º30\`
Método tradicional de ensino encontrado em sala de aula.	
Cálculo do ângulo α Minutos graus 60 ________ 30 25 ________ β $\frac{60}{25} = \frac{30}{\beta}$ $60\beta = 25.30$ $\beta \ \frac{750}{60}$ β Vejam que quando não temos valores exatos precisamos de realizar algumas conversões estabelecidas nas propriedades citadas acima. Como 0,5º=30\` 1\`= 60\`\` (um minuto é igual a sessenta segundos) 1º=60\`(um grau é igual a sessenta minutos) β	Como o ponteiro dos minutos percorreu 25 minutos equivale a 150º Logo, α = 150º - β = 120º - 12º30\` = 119º60\` - 12º30\`=107º30\` Outra conversão foi preciso realizar: 120º= retirando um grau e transformando em minutos=119º60\` 1º=60\` Essa prática fica cada vez mais burocrática e tornando difícil de compreensão para os estudantes. Com a aplicação da equação inovadora torna-se mais prático e eliminando as dificuldades encontradas na pratica de resolução de problema de trigonometria do relógio. Isso acontece nos exemplos seguintes
b) 1h:15 min	
Vejamos que H= 1 e M =15, substituindo na equação temos: $\alpha = \left| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right|$ $\alpha = \left| \frac{(60.1 - 11.15)^\circ}{2} \right|$ $\alpha = \left| \frac{(60 - 165)^\circ}{2} \right|$ $\alpha = \frac{105^\circ}{2}$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 52º30\`

$\alpha = 107º30'$	
c) 1h:40min	
Vejamos que H= 1 e M =40, substituindo na equação temos: $\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)°}{2} \right\| \alpha = \left\| \frac{(60.1 - 11.40)°}{2} \right\|$ $\alpha = \left\| \frac{(60 - 440)°}{2} \right\| \alpha = \frac{380°}{2}$ $\alpha = 190°$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 190º.

d)2h:40 min	
Vejamos que H= 2 e M =40, substituindo na equação temos: $\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)°}{2} \right\| \alpha = \left\| \frac{(60.2 - 11.40)°}{2} \right\|$ $\alpha = \left\| \frac{(120 - 440)°}{2} \right\| \alpha = \frac{320°}{2}$ $\alpha = 160°$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 160º.
e) 5h:55 min	
Vejamos que H= 5 e M =55, substituindo na equação temos: $\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)°}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.1 - 11.40)°}{2} \right\|$ $\rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60 - 440)°}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \frac{380°}{2}$ $\therefore \alpha = 190°$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 190º.
f) 6h:30 min	
Vejamos que H= 6 e M =30, substituindo na equação temos: $\alpha = \left\| \frac{(60.H \quad 11.M)°}{2} \right\| \rightarrow \alpha = \left\| \frac{(60.6 - 11.30)°}{2} \right\|$ $(360 - 330)°$ $30°$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 15º.

$\rightarrow \alpha = \mid \frac{\quad}{2} \mid \rightarrow \alpha = \frac{\quad}{2}$ $\therefore \alpha = 15°$	

g) 10 h :15 min	
Vejamos que H= 10 e M =15, substituindo na equação temos: $\alpha = \mid \frac{(60.H \quad 11.M)°}{2} \mid \rightarrow \alpha = \mid \frac{(60.10-11.15)°}{2} \mid$ $\rightarrow \alpha = \mid \frac{(600-165)°}{2} \mid \rightarrow \alpha = \frac{435°}{2}$ $\therefore \alpha = 217{,}5° \ \alpha = 217°30`$ Lembrando que: $0{,}5° = 30`$	Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 217º30`.

Metodologia aplicada quando o relógio marca 12 horas e seus minutos Definição: Neste caso temos que observar que estamos no marco zero do relógio, ou seja, 12h=0 h	
Exemplo: Qual o ângulo entre os ponteiros de um relógio quando marca exatamente 12h20min? Solução: Podemos observar que devemos realizar a conversão de 12h=0h e aplicar na equação:	Onde: H=0 horas M=20 minutos $\alpha = \mid \frac{(60.H \quad 11.M)°}{2} \mid \rightarrow \alpha = \mid \frac{(60.0-11.20)°}{2} \mid$ $\rightarrow \alpha = \mid \frac{(0-220)°}{2} \mid \rightarrow \alpha = \mid -\frac{220°}{2} \mid$ Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 110º.

Pelo método tradicional utilizado nas escolas:	
Cálculo do ângulo α Minutos graus 60 ____________ 30 20 ____________ β $\frac{60}{20} = \frac{30}{\beta}$ $60\beta = 20.30$ $\beta \ \frac{600}{60} \ \beta$	Como o ponteiro dos minutos percorreu 20 minutos equivale a 120º, Logo, α = 120º - β = 120º - 10º = 110º Na equação de ``Euclides este exemplo não possuía solução como mostra a resolução abaixo: α = | 30xh – 0,5 .M | α 0,5 x 20 | α – 10 | α α

Vejam que a equação de ``Euclides `` não produziu uma solução. Muita variabilidade em relação a solução exta. Isso acontece porque o mesmo não estabeleceu um sistema de numeração válido para estrutura do relógio. Mostra que quando o ponteiro do relógio da hora chega em doze horas, um deslocamento de estrutura do sistema de horas, pois, zera e se inicia um novo ciclo de formação de ângulo entre os ponteiros do relógio. Tomado como base no sistema de numeração decimal de base 10. Além disso, temos que observar que na formatação de horas e minutos não existe 60 segundos e nem 60 minutos. Portanto, esses valores são convertidos para minutos e horas. Como essa prática de ensino encontrada em sala de aula, torne-se um problema na produção de conhecimento vivenciados em sala de aula no ensino em todo Brasil. O que chamamos de: O problema de Euclides

Exemplo 2:Qual formado pelos ponteiros do relógio da figura abaixo?

Solução: Temos 12h 30min, vejamos que devemos realizar a conversão de 12h=0 h Onde:

H=0 horas M=30 minutos

$\alpha = \left| \frac{(60.H \quad 11.M)^\circ}{2} \right| \rightarrow \alpha = \left| \frac{(60.0 - 11.30)^\circ}{2} \right|$

$\rightarrow \alpha = \left| \frac{(0-330)^\circ}{2} \right| \rightarrow \alpha = \left| -\frac{330^\circ}{2} \right| = 165º,$

O módulo neste caso para tornar o ângulo positivo.
Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 165º.

Pelo método tradicional utilizado nas escolas:

Cálculo do ângulo α

Minutos	**graus (°)**
60	30
30	$\underline{\beta}$

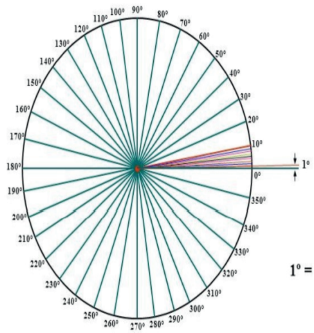
$\frac{60}{30} = \frac{30}{\beta}$ $60\underline{\beta} = 30.30$ β $\frac{900}{60}$ β

Como o ponteiro dos minutos percorreu 30 minutos equivale a 180º
Logo, α = 180º - $\underline{\beta}$ = 120º - 15º = 165º

Observação: algumas conversões deverão ser feitas quanto ao formato das horas, como:

13h= 1h 14h=2h 15h=3h 16h=4h 17h=5h 18h=6h 19h=7h 20h=8h
21h=9h 22h=10h 23h=11h 00h=12h

Baseado na construção de um relógio convencional que é representado de 1h até as 12h.



$$1° = \frac{1}{360}$$

Definição de Grau: corresponde a uma parte da circunferência de 360º.

Dando continuidade a construção dessa tese, segue abaixo uma lista de exercícios para realização de testes que confirmam a eficácia do modelo matemático criado.

01- Determine o ângulo			
a) 7h:30 min b) 9h:10 min c) 10h:30 min d) 11h:59 min e) 12h :10 min f) 5h:44 min g) 8h:40 min	h) 7h:30 min i) 9h:10 min j) 10h:30 min k) 11h:59 min l) 12h :10 min m) 5h:44 min n) 7h:30 min	o) 7h:30 min p) 9h:10 min q) 10h:30 min r) 11h:59 min s) 12h :10 min t) 5h:44 min u) 8h:40 min	v) 7h:30 min w) 9h:10 min x) 10h:30 min y) 11h:59 min z) 12h :10 min aa) 5h:44 min bb) 7h:30 min
cc) 7h:30 min dd) 9h:10 min ee) 10h:30 min ff) 11h:59 min gg) 12h :10 min hh) 5h:44 min ii) 8h:40 min	jj) 7h:30 min kk) 9h:10 min ll) 10h:30 min mm) 11h:59 min nn) 12h :10 min oo) 5h:44 min pp) 8h:40 min	qq) 14h:30 min rr) 15h:10 min ss) 16h:30 min tt) 17h:59 min uu) 18h :40 min vv) 19h:44 min ww) 20h:40 min	xx) 21h:30 min yy) 22h:10 min zz) 23h:40 min aaa) 00h:10 min bbb) 00h:30 min ccc) 12h:50 min

02- Determine o ângulo			
jj) 7h:30 min kk) 9h:10 min	qq) 14h:30 min rr) 15h:10 min	xx) 21h:30 min yy) 22h:10 min	

ll)	10h:30 min	ss)	16h:30 min	zz)	23h:40 min	
mm)	11h:59 min	tt)	17h:59 min	aaa)	00h:10 min	
nn)	12h :10 min	uu)	18h :40 min	bbb)	00h:30 min	
oo)	5h:44 min	vv)	19h:44 min	ccc)	12h:50 min	
pp)	8h:40 min	ww)	20h:40 min			

03-Um Professor de matemática estava ministrando sua aula, exatamente às 15 horas e 15 minutos, quando um aluno Pedro indagou e perguntou qual era o ângulo entre os ponteiros do relógio que se encontrava na sala de aula?

a)	7º 30`	d)	90º
b)	22º 30`	e)	97º 30`
c)	45º		

04-Marlene se atrasou e chegou ao posto de saúde às 9h30min. Chegou atrasada para sua consulta 1 hora e 45 minutos. Qual o menor ângulo entre os ponteiros do relógio que chegou no posto médico?

05- Marcos e Larissa marcaram um encontro em um shopping para irem ao cinema. Larissa chegou 45min adiantada. O filme era às 17h50min. Que horas Larissa chegou ao shopping? Qual o menor ângulo entre os ponteiros do relógio na hora que Larissa chego no shopping?

06- São 14 horas e ainda faltam 3h40min para a jornada de trabalho de José acabar. Que horas José vai sair do trabalho?

07- Quantos minutos têm uma hora?	08- Se você sair às 6h00min e voltar às 9h30min, quanto tempo ficou fora de casa?
09- Você estudou por 45min um texto de história e respondeu as questões em 15min. Quanto tempo gastou ao todo em suas tarefas de história?	10- Qual é o tempo que você gasta, após ter acordado, para se arrumar e tomar café antes de sair de casa ou ficar em casa mesmo?

11- Um prefeito de uma cidade, deseja construir uma rotatório na cidade e um relógio no meio para que a população veja a hora toda vez que passe naquele local. No ato na inauguração, o relógio marcava exatamente 12h:30 min.

Após o estabelecimento dessas questões, seguimos com a lista de exercício Sugestivo para trabalhar interdisciplinar e contextualizado

01-Pedro trabalha com consertos de relógio em sua cidade. Quando chegou um cliente com um relógio que marcava exatamente 2 h: 00 min. Qual o ângulo que fica entre os dois ponteiros da hora e minutos?

a) 10º
b) 20º
c) 30º
d) 60º
e) 90º

02-(Enem 2014) Um executivo sempre viaja entre as cidades A e B, que estão localizadas em fusos horários distintos. O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas. Ele sempre pega um voo que sai de A às 15h e chega à cidade B às 18h (respectivos horários locais). Certo dia, ao chegar à cidade B, soube que precisava estar de volta à cidade A, no máximo, até as 13h do dia seguinte (horário local de A). Para que o executivo chegue à cidade A no horário correto e admitindo que não haja atrasos, ele deve pegar um voo saindo da cidade B, em horário local de B, no máximo à(s)

A) 16h.
B) 1 0h.
C) 7h.
D) 4h.
E) 1h.

03- (Unemat 2010) A respeito dos fusos horários, assinale a alternativa correta.

A) O Meridiano de Greenwich é a referência para o estabelecimento dos 24 fusos, sendo 12 para norte e 12 para sul.
B) Os fusos são resultados da multiplicação da circunferência terrestre pelas 24 horas.
C) Cada fuso envolve 15 meridianos e corresponde a uma hora, que aumenta na direção oeste.
D) Devido ao fato de o Brasil estar situado no hemisfério ocidental, todos os horários são atrasados em relação ao Meridiano de Greenwich.
E) Devido à sua extensão territorial no sentido da latitude (Leste-Oeste), o Brasil apresenta três fusos diferentes.

04-(UCS 2015) Em 2016, o Brasil receberá visitantes de diversas partes do globo, pois será palco das Olimpíadas, um dos maiores eventos esportivos mundiais. Considere que a cerimônia de abertura dos Jogos Olímpicos ocorrerá no dia 5 de agosto, às 21 horas, na cidade do Rio de Janeiro, que está localizada três fusos a oeste de Greenwich. Que horário um turista deverá sair de Nairóbi, que está localizada três fusos a leste de Greenwich, para chegar ao aeroporto Internacional Santos Dumont uma hora antes do início da cerimônia? Desconsidere o horário de verão e lembre-se de que o tempo de voo é de 11 horas.

A) 14h.
B) 13h.
C) 9h.
D) 15h.
E) 10h.

05-(UEG 2019) Nas semifinais da copa do mundo de futebol, realizadas no Brasil em 2014, a seleção brasileira jogou contra a Alemanha, no estádio do Mineirão em Belo Horizonte - MG, em partida que teve início às 17 horas do dia 8 de julho de 2014. Considerando os fusos horários de Brasil (-3UTC) e Alemanha (+1UTC, desconsiderando o horário de verão), os brasileiros que estavam na Alemanha assistiram ao jogo a partir das

A) 21 horas.
B) 19 horas.
C) 13 horas.
D) 23 horas.
E) 15 horas.

Dando prosseguimento a lista de exercícios propostos neste estudo, segue abaixo os próximos itens:

06-(Cefet–MG) A medida do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 9h 30min, em grau, é:

a) 90
b) 105
c) 110
d) 120
e) 150

07-Em um relógio, a hora foi ajustada exatamente para 12 h. Calcule as horas e os minutos que estará marcando esse relógio após o ponteiro menor percorrer um ângulo de 44º.

Solução: Nesse caso não precisa de equação, pois os três ponteiros estão alinhados. Logo o ângulo é 0°.

08-O relógio de uma torre possui o ponteiro dos minutos medindo 1 metro. A distância que a extremidade desse ponteiro percorre em 50 minutos é:

a) 5,23 metros
b) 5,32 metros
c) 5,53 metros
d) 5,63 metros
e) 5,73 metros

09-A roda de uma motocicleta possui o raio medindo 50 centímetros. Determine a distância que a motocicleta percorre quando a roda dá 500 voltas. Utilize $\pi = 3{,}14$. Solução: $C = 2 . \pi . r$ $C = 2 \times 3{,}14 \times 50$ C = 314 cm 500 voltas C = 314 x 500 C = 157.000 cm ou 1,5 km.
10-(PUC–PR) Um relógio foi acertado exatamente às 6h. Que horas o relógio estará marcando após o ponteiro menor (das horas) ter percorrido um ângulo de 72º? Sabemos que a cada hora o ponteiro das horas se desloca 30º, dessa forma temos que: 72º = 30º + 30º + 12º Assim, Deverão passar 2 horas e 24 minutos para que o ponteiro das horas se desloque 72º. Portanto, o relógio estará marcando 8 horas e 24 minutos

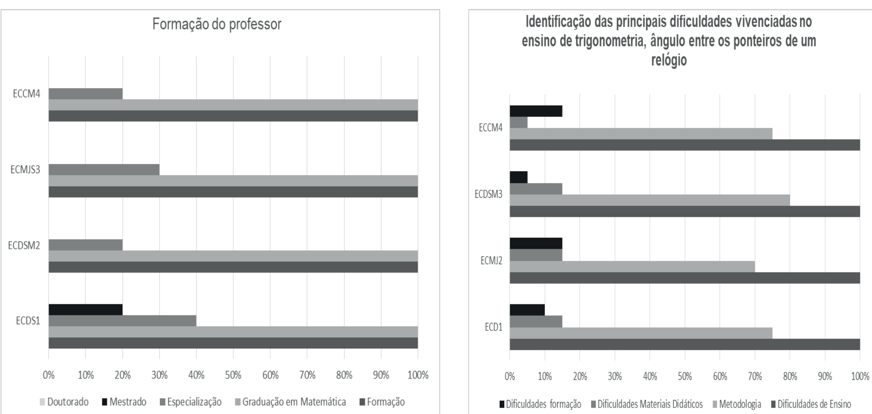
Dificuldades quanto a resolução de problemas de trigonometria no 2° ano do ensino médio de 4 escolas de ensino médio do Estado da Paraíba.

Avaliação realizada com os professores provenientes da Escola cidadã integral Dorgival Silveira (S1), Escola Cidadã integral Mestre Júlio Sarmento (S2), Escola Cidadã Doutor Silva Mariz (S3) e Escola Estadual de Ensino

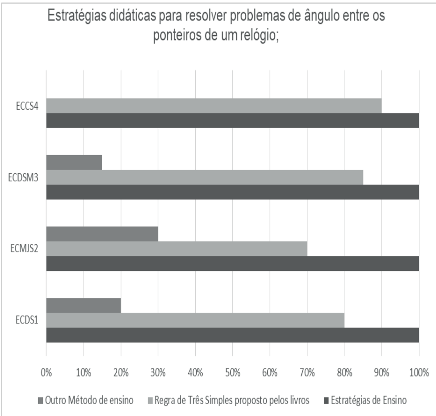
Fundamental Celso Mariz (E4).

Para melhor entendimento a respeito do nível de formação dos professores participantes da pesquisa, observa-se na figura 1A, que todos os professores são graduados em matemática, sendo entre 20 e 40% dos entrevistados tem especialização, valores observados em todas as escolas participantes da pesquisa, e apenas 20% dos professores da escola 1 têm mestrado.

A. B.



C.



D.

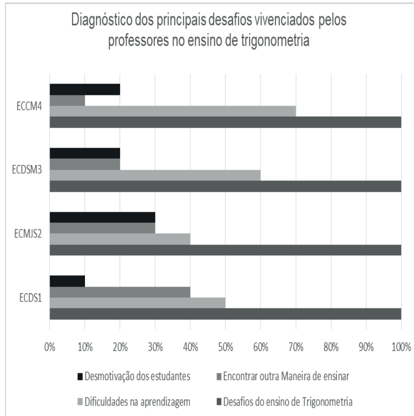


Figura 1. Formação do professor (A), principais dificuldades vivenciadas no ensino de trigonometria, ângulo entre os ponteiros de um relógio (B), Estratégias didáticas para resolver problemas de ângulo entre os ponteiros de um relógio (C) e principais desafios vivenciados pelos professores no ensino de trigonometria(D), apresentados por professores das escolas: Escola cidadã integral Dorgival Silveira (S1), Escola Cidadã integral Mestre Júlio Sarmento (S2), Escola Cidadã Doutor Silva Mariz (S3) e Escola Estadual de Ensino Fundamental Celso Mariz (E4), respectivamente.

Quanto a investigação de quantos professores já concluíram o doutorado, os resultados apontam que nenhum professor tem essa qualificação.

No que tange a Identificação das principais dificuldades vivenciadas no ensino de trigonometria, ângulo entre os ponteiros de um relógio (Figura 1B), observa-se que a maioria dos professores das 4 escolas envolvidas nesse estudo citaram a falta de uma metodologia que pudesse facilitar o ensino de trigonometria para os estudantes. Por outro lado, outra dificuldade no ensino de trigonometria relatado pelos professores foi a escassez de material didático que pudessem dá suporte a resolução de problemas discutidos em sala de aula. Outra dificuldade relatada pelos professores foi a falta de tempo para eles darem continuidade aos estudos, a exemplo da formação continuada.

Em termos comparativos, a maior dificuldade apontada pelos docentes foi a metodologia de ensino de trigonometria para alunos do ensino médio (75-80%), enquanto aquela que apresentou menor índice percentual, ou a menos impactante no processo de ensino, foi a dificuldade que os professores têm em dá continuidade à sua formação (Figura 1B). Outra questão avaliada nesse estudo foi a identificação das estratégias didáticas para resolver problemas de ângulo entre os ponteiros de um relógio em sala de aula.

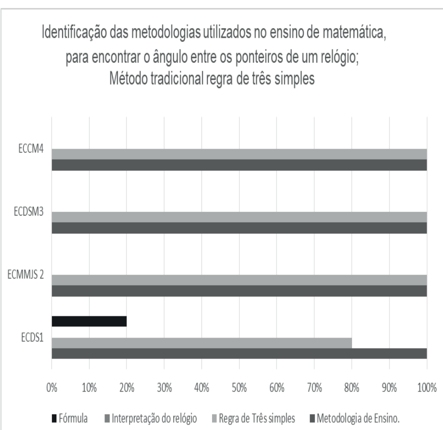
De acordo com a figura 2C observa-se que a maioria dos professores das escolas avaliadas relataram que resolvem os problemas de trigonometria em sala de aula utilizando regra de três simples, conforme o material didático apresentado pelos livros de matemática. Nenhum dos professores das escolas amostradas evidenciaram outra metodologia para a resolução dessas questões, deixando claro a necessidade de estudos mais aprofundados pela temática e a geração de novos modelos matemáticos para serem utilizados tanto pelos professores quanto para os estudantes.

Quanto aos principais desafios vivenciados pelos professores no ensino de trigonometria, observa-se que entre 50 e 70% dos professores das 4 escolas amostradas evidenciaram ser as dificuldades na aprendizagem. Outros desafios que também foram relatadas pelos professores foram a necessidade de encontrar outra maneira para ensinar trigonometria aos seus alunos e a desmotivação dos estudantes (Figura 1D).

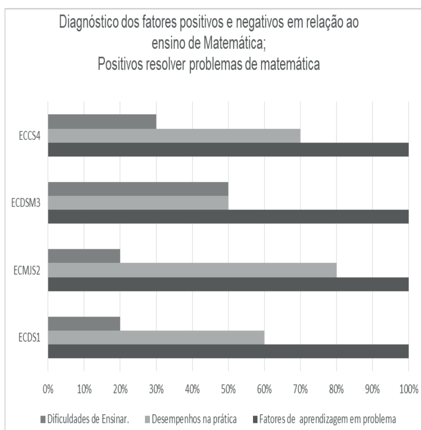
Fazendo-se um comparativo entre os resultados obtidos por escola, observamos que 70% dos professores da escola 4 evidenciaram como desafio vencer a dificuldade de aprendizagem dos alunos e até deles mesmo.

De acordo com a figura 2A, observa-se que a metodologia usada no ensino de matemática, para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio, tem sido a regra de três simples.

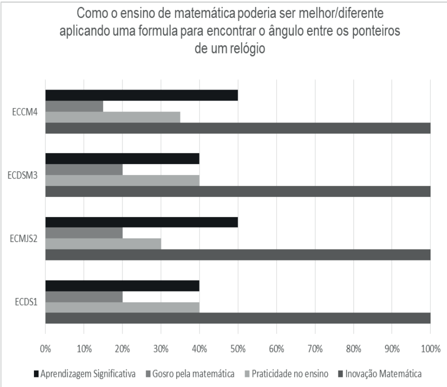
A.



B.



C.



D.

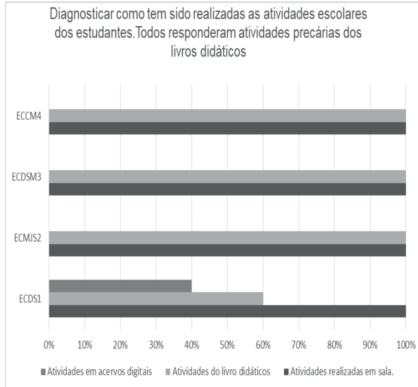


Figura 1. Identificação das metodologias utilizados no ensino de matemática, para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio (A), fatores positivos e negativos em relação ao ensino de Matemática (B), como o ensino de matemática poderia ser melhor/diferente aplicando uma formula para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio (C) e como tem sido realizadas as atividades escolares dos estudantes do 2 ano do ensino médio (D), relatados por professores das escolas: Escola cidadã integral Dorgival Silveira (S1), Escola Cidadã integral Mestre Júlio Sarmento (S2), Escola Cidadã Doutor Silva Mariz (S3) e Escola Estadual de Ensino Fundamental Celso Mariz (E4), respectivamente.

Por outro lado, 20% dos professores da Escola 1, relataram que já usam uma fórmula desenvolvida por eles para encontrarem o ângulo. Assim, por unanimidade observou-se que nenhum professor (0%) utiliza a fórmula do relógio para encontrar o ângulo e responder às questões de trigonometria.

Com relação aos fatores positivos e negativos em relação ao ensino de Matemática, de acordo com a figura 2B, observa-se entre 50 e 80% da população amostrada nessa pesquisa, elencaram que o desempenho em sua prática de ensino é o fator mais negativo para o ensino de matemática. Por outro lado, um percentual variando entre 20 e 50% dos professores entrevistados relataram que existe muito problemas para ensinar matemática em sua realidade. Quanto aos fatores positivos, os professores entrevistados não fizeram menção a esse questionamento.

Outra questão analisada nesse trabalho científico, foi identificar como o ensino de matemática poderia ser melhor/diferente se fosse encontrado uma fórmula para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio (2C). Os resultados evidenciaram que seria prático ensinar matemática a partir do conhecimento do relógio. De forma similar 40-50% dos entrevistados relatam em suas respostas que utilizando-se essa fórmula a aprendizagem dos alunos seria significativa.

Outra resposta dada pelos professores a esse questionamento foi que os estudantes seriam motivados a resolver problemas de matemática utilizado esse conhecimento (15-20%).

No tocante ao questionamento de como tem sido realizadas as atividades de trigonometria dos estudantes, observa-se pela figura 2D, que apenas 40% dos professores de uma escola citaram que realizavam suas atividades com o uso de acervos digitais. Nenhum dos professores das demais escolas relataram conhecer outra maneira de ensinar trigonometria aos alunos, confirmando o desconhecimento do uso do relógio como instrumento auxiliar para calcular o ângulo e resolver as questões de forma simples e rápida.

Conforme a figura 3A, observa-se que foi a quantificação de professores que acertaram a resolução de questões utilizando o modelo matemático antigo utilizado na resolução de questões de trigonometria em sala de aula e quantos professores conseguiram resolver as mesmas questões utilizando o novo modelo matemático proposto nesse estudo.

A. B.

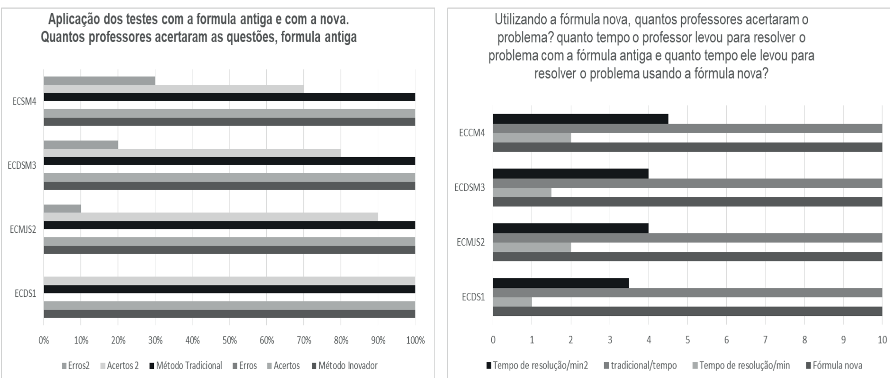


Figura 1. Quantificação dos acertos e erros na resolução dos problemas de trigonometria utilizando-se o modelo matemático tradicional (A) tempo gasto pelos professores para resolver as questões pelo modelo matemático produzido na pesquisa (B), relatados por professores das escolas: Escola cidadã integral Dorgival Silveira (S1), Escola Cidadã integral Mestre Júlio Sarmento (S2), Escola Cidadã Doutor Silva Mariz (S3) e Escola Estadual de Ensino Fundamental Celso Mariz (E4), respectivamente.

Conforme a figura observamos que todos os professores acertaram as respostas das questões de trigonometria propostas para o teste. Por outro lado, quando os professores utilizaram o modelo matemático tradicional, esses erraram em média de 30 a 50%. Esses resultados foram encontrados com os professores das escolas 2, 3 e 4, respectivamente. Já a avaliação realizada na escola 1, observa-se que todos os professores acertaram as questões utilizando o modelo matemático tradicional para a resolução das questões. De acordo com os resultados obtidos (Figura 3A), todos os professores de todas às escolas avaliadas nesse estudo certaram às questões.

De forma similar, foi avaliado o tempo necessário para resolver as questões fazendo-se um comparativo entre as questões resolvidas pelo modelo matemático tradicional e quanto tempo os professores gastaram para resolver as questões utilizando o modelo matemático proposto nessa pesquisa (Figura 3B).

Observa-se que quando os professores utilizaram o novo modelo matemático proposto nesse estudo, os professores gastaram em média de 1 a 2 minutos. Por outro lado, quando os professores utilizaram o modelo matemático tradicional para resolver as questões, esses gastaram em média de 10minutos, independente da escola avaliada.

Esses resultados confirmam a viabilidade da utilização do novo modelo matemático proposto nessa pesquisa, visto que os professores têm apresentado dificuldades em resolver problemas de trigonometria usando o modelo matemático tradicional. Outra razão para os professores de matemática e os livros didáticos de matemática adotarem esse novo modelo matemático é o fato de se tratar de uma fórmula simples, rápida, de fácil aplicação e que não apresenta dificuldades quanto a sua aceitação por parte dos estudantes.

Avaliação realizada com estudantes do 2°ano do ensino médio das escolas

A metodologia de ensino é uma ferramenta de grande importância para o aprendizado dos estudantes. Assim, como em todas as disciplinas, o conteúdo de matemática necessita de metodologias que simplifiquem a resolução das questões e contribua com a aprendizagem.

De acordo com a figura 4A, observa-se que quando questionados a respeito das principais dificuldades vivenciadas para resolver problemas de trigonometria, constata-se respostas bem variadas. Um percentual entre 30 e 40% do público amostrado evidenciaram que as dificuldades eram atribuídas, em parte, a falta de metodologia do professor, ao conteúdo curricular de trigonometria considerado de difícil aprendizado pelos livros didáticos e as dificuldades com as medidas de ângulos e seus submúltiplos.

A. B.

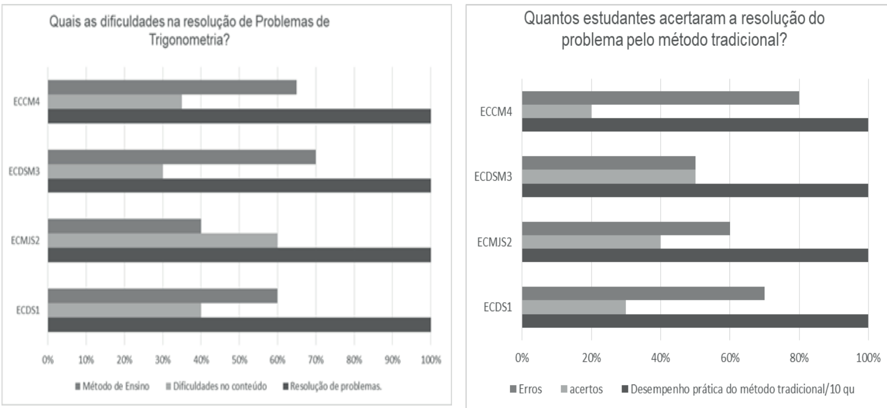
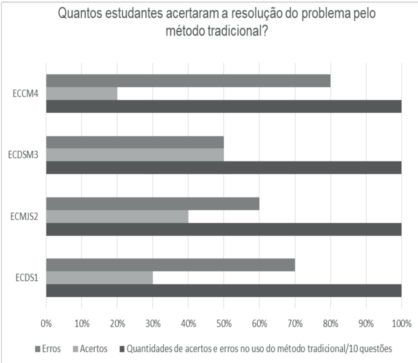


Figura 1. Dificuldades na resolução de problemas de trigonometria (A) e quantidade de estudantes que acertaram a resolução de problemas de trigonometria pelo método tradicional (B) relatados por estudantes das escolas: Escola cidadã integral Dorgival Silveira (S1), Escola Cidadã integral Mestre Júlio Sarmento (S2), Escola Cidadã Doutor Silva Mariz (S3) e Escola Estadual de Ensino Fundamental Celso Mariz (E4), respectivamente.

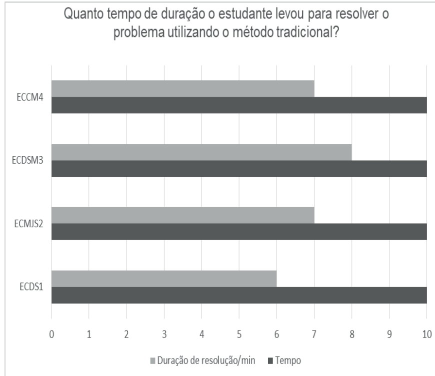
Quanto a quantidade de estudantes que fizeram os testes e acertaram a resolução dos problemas de trigonometria utilizando a metodologia tradicional aplicada para a solução desses problemas, ou seja, a regra de três simples, observou-se que o percentual de erros variou entre 50 e 80%, valor observado quando foram testados os estudantes da escola 4. De forma similar, os estudantes da escola 1 também apresentaram um nível alto de erros (70%) das enquetes. No que tange a linha dos acertos, os estudantes da escola 2 e 3 foram aqueles com maior destaque, visto que acertaram em média 40 a 50%. Esse resultado já é considerado muito bom, visto que a grande maioria dos estudantes do ensino médio tem muita dificuldade em resolver questões de trigonometria.

No tocante a quantidade de estudantes que acertaram ou erraram mais questões utilizando o método de ensino tradicional, regra de três, para resolver problemas de trigonometria e o tempo gasto para solucionar cada problema, observa-se pela figura 5 A e B, a grande maioria dos estudantes erram as questões e aqueles que acertaram levaram em média até 8 minutos para resolver a questão.

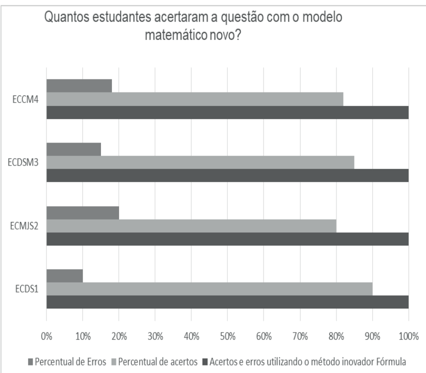
A.



B.



C.



D.

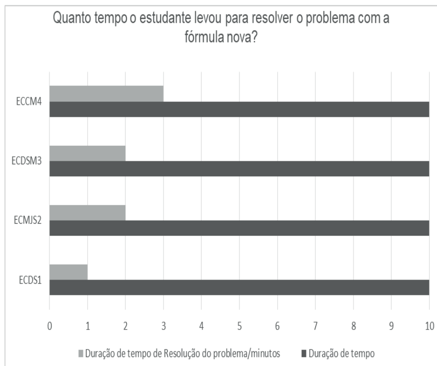


Figura 1. Quantidade de estudantes que acertaram mais questões utilizando o método de ensino tradicional, regra de três, para resolver problemas de trigonometria (A) e o tempo gasto para solucionar cada problema (B), quantificação do número de estudantes que acertaram a resolução dos problemas de trigonometria utilizando o modelo matemático inovador proposto no estudo (C) e quantificação do tempo gasto pelos estudantes para resolverem as questões solicitadas pelo modelo novo (D), relatados por estudantes das escolas: Escola cidadã integral Dorgival Silveira (S1), Escola Cidadã integral Mestre Júlio Sarmento (S2), Escola Cidadã Doutor Silva Mariz (S3) e Escola Estadual de Ensino Fundamental Celso Mariz (E4), respectivamente.

Com relação a quantidade de estudantes que acertaram a resolução das questões de trigonometria utilizando o novo modelo matemático proposto nessa pesquisa (figura 5C), observa-se que 80 a 90% dos estudantes acertaram as questões propostas pelo pesquisador, enquanto apenas 10 a 20% dos estudantes não conseguiram acertar as questões. Em termos de tempo, observou-se que os estudantes gastaram em média de 1 a 3 minutos. É interessante mencionar que os estudantes da escola 1 gastaram apenas 1 minuto para resolverem as questões de trigonometria, outrora considerados como problemas difíceis de resolução.

Capítulo 3

DISCUSSÕES

Como o objetivo desse trabalho é avaliar a viabilidade da utilização do novo modelo matemático proposto nesse estudo e apontar as principais dificuldades apresentadas pelos professores quanto a resoluções de questões de trigonometria utilizando o método tradicional proposto nos livros didáticos, observou-se de forma geral, que os professores tem dificuldade ao utilizarem o modelo tradicional, pois levam muito tempo para resolverem os problemas e em muitos casos não conseguem resolver.

Outro fator observado pelos professores nesse estudo foi o fato dos estudantes se sentirem desestimulados ao tentarem resolver os problemas de trigonometria utilizando o modelo matemático tradicional (regra de três). Além disso, os estudantes cometem erros consideráveis ao tentarem resolver as questões pelo modelo matemático proposto nos livros didáticos de matemática.

De maneira geral as dificuldades apontadas pelos professores se relacionam a falta de continuidade nos estudos de matemática, ou seja, a formação continuada, a escassa literatura que não oferece material didático em prol do desenvolvimento de novos modelos matemáticos que possam ajudar a solucionar os problemas de trigonometria com facilidade e rapidez, e a falta de metodologias inovadoras para o ensino de trigonometria. Assim, existem muitas barreiras no ensino-aprendizado de matemática, exigindo o desenvolvimento de novas pesquisas que viabilizem de forma dinâmica o ensino de matemática.

Acerca das dificuldades na resolução de questões envolvendo a trigonometria, Pereira e Guerra (2016), utilizando um relato de uma pesquisa realizada em uma escola pública do município de Marechal Deodoro/AL com alunos do Ensino Médio, cujo objetivo principal era investigar as dificuldades e os efeitos de aprendizagem produzidos pela aplicação de uma determinada sequência didática sobre conceitos fundamentais da trigonometria, observaram que as maiores dificuldades na resolução de exercícios de trigonometria eram em conceituar e aplicar conteúdos básicos fundamentais que são necessários para sua evolução, tais como compreensão da aplicabilidade do teorema de Pitágoras e aplicação da regra de três simples.

Quanto as Estratégias didáticas para resolver problemas de ângulo entre os ponteiros de um relógio, mediante os achados nesse estudo, ficou claro que os professores reivindicam urgentemente um novo método de estudo para resolver essas questões, evidenciando que a utilização da metodologia de regra de três simples publicada nos livros didáticos não é eficaz, ou seja, essa metodologia dificulta o entendimento e provoca na comunidade estudantil a desmotivação e até o abandono dos estudos.

No que diz respeito aos principais desafios enfrentados pelos professores em seu cotidiano em sala de aula, os resultados desse trabalho deixaram claro que a desmotivação dos estudantes, a dificuldade no aprendizado apresentado pelos estudantes e a busca por um novo método para resolver os problemas de trigonometria, são os pontos mais críticos, ou seja, as maiores fragilidades da vivência dos professores em sala de aula. A esse respeito, Estudos conduzidos por Trevisan e Buriasco (2016), utilizando alguns testes para verificar os conhecimentos de trigonometria, através de uma prova em fases com alunos do segundo ano do ensino médio, cujas questões dessa prova em fase foram tiradas de livros didáticos e provas anteriores, propiciando aos estudantes resolvê-las ao longo de um semestre. Os autores observaram que praticamente todas as questões propostas eram limitadas à memorização e reprodução de algoritmos. questões que contemplam apenas memorização prejudicará o aprendizado do aluno, permitindo concluir que mesmo que nos livros didáticos aparecem poucas questões que instigue os alunos a problematizar, existem outros recursos didáticos para subsidiar a atividade do professor.

Quanto as metodologias utilizadas no ensino de matemática, para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio, os professores elencaram que esse ângulo é encontrado através da fórmula proposta nos livros, pela interpretação do relógio, por regra de três simples. Diante desse fato é importante desenvolver novas metodologias para encontrar o ângulo de forma mais eficiente, com menor tempo para ser encontrado e com facilidade tanto na prática do ensino como na absorção dos conhecimentos.

Outra informação importante para essa discussão são os fatores positivos e negativos no ensino de matemática, principalmente quando o assunto é trigonometria. Diante da constatação dos professores, os fatores negativos são mais pesados nesse quesito. Assim, a dificuldade na prática de ensino, o desempenho do professor em sua prática e os fatores de aprendizagem quanto a resolução de problemas são os mais citados.

Questionados a respeito de como o ensino de matemática poderia ser melhor/diferente quando aplicado uma fórmula para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio, os professores relataram que essa nova metodologia iria despertar o gosto pela matemática tanto dos estudantes como dos professores. Além disso, os resultados evidenciaram que essa nova metodologia iria revolucionar o ensino de matemática pois, tornaria o ensino mais prático e a aprendizagem dos estudantes seria significativa. Os resultados encontrados permitem acrescentar ainda que a descoberta de uma nova fórmula para encontrar o ângulo entre os ponteiros de um relógio seria uma inovação no campo da matemática, deixando bem claro a necessidade de mudanças imediatas no que tange a fórmulas para a resolução de problemas de trigonometria.

Quanto ao Diagnostico de como tem sido realizadas as atividades escolares quanto a resolução de problemas de trigonometria, os resultados apontaram que as atividades estão sendo realizadas de forma precária utilizando-se os livros didáticos. Também ficou claro que os professores utilizam o acervo digital para minimizar os problemas de aprendizado e até buscam resolver os problemas em sala de aula tentando desenvolver alternativas que possam facilitar sua resolução.

Outra questão importante para basilar a eficiência do novo modelo matemático pelos professores foi a aplicação dos testes com o modelo matemático tradicional e com o novo modelo proposto nessa pesquisa. Os testes realizados viabilizaram um comparativo para se ter ideia dos acertos e erros a partir do uso de um novo instrumento metodológico Assim, de maneira geral, observaram-se que os professores acertaram todas s questões propostas e resolvidas pelo novo modelo matemático. Diante dessa constatação, mais uma vez fica confirmado a viabilidade de tornar esse novo modelo matemático para resolver problemas de trigonometria como uma ferramenta indispensável nos livros didáticos, sugerindo assim a produção e lançamento de um novo livro que possa ser útil tanto para os estudantes bem como para os professores.

Para dá robustez e maior segurança a viabilidade do uso do novo modelo matemático para resolver questões de trigonometria, a determinação de quanto tempo o professor necessitaria para resolver questões de trigonometria utilizando o modelo matemático apresentado nos livros didáticos e através da utilização do novo modelo proposto nesse estudo, tornou-se uma variável fundamental. Conforme este resultado, colaboração com estudo (CLARETO, 2002).

Assim, utilizando o novo modelo matemático os professores gastam apenas 1 minuto. Confrontando-se esse intervalo de tempo com aquele gasto ao se utilizarem a fórmula tradicional, observou-se que os professores quando conseguiam resolver, gastavam em média 8 minutos. Esses resultados confirmam a necessidade urgente de publicação desses resultados e sua incorporação nos livros de matemática para o ensino médio.

Quanto aos resultados obtidos pelos estudantes, é possível i ferir que esses apresentam grande dificuldades para solucionar questões de trigonometria utilizando o método da regra de três simples. Assim, o novo modelo matemático proposto nesse estudo funcionará como "bálsamo" para aqueles que perderam o gosto pela matemática e a visualizam como "a matéria do terror".

Apesar de sua grande importância na vida prática de estudantes e professores, ainda são escassos os estudos de pesquisa que viabilizem alternativas facilitadoras do conhecimento como o novo modelo matemático proposto nessa pesquisa. Assim, não é possível inferir comparações com outras metodologias disponíveis na literatura e portanto, a confirmação desse trabalho supera apenas a metodologia proposta por “Euclides” nas últimas décadas.

CONCLUSÃO

De maneira geral as dificuldades apontadas pelos professores e estudantes elencadas nesse estudo, se relacionam a falta de continuidade nos estudos de matemática por parte dos professores, ou seja, a formação continuada, a escassa literatura que não oferece material didático em prol do desenvolvimento de novos modelos matemáticos que possam ajudar a solucionar os problemas de trigonometria com facilidade e rapidez por parte dos estudantes, e a falta de metodologias inovadoras para o ensino de trigonometria tanto sob o olhar dos professores como dos estudantes. Assim, existem muitas barreiras no ensino-aprendizado de matemática, exigindo o desenvolvimento de novas pesquisas que viabilizem de forma dinâmica o ensino dessa disciplina.

A geração do novo modelo matemático foi necessário para suprir as dificuldades vivenciadas na prática do ensino de trigonometria em sala de aula, objetivando desenvolver uma equação capaz de resolver a problematica da não compreensão do ângulo do relógio. Desde a Metodologia tradicional até a inovação, foi visto que o não aprendizagem foi produzido por técnicas capazes de tornar o ensino de trigonometria dificil e cheio de burocracias.

Portanto, o desenvolvimento desta pesquisa foi relevante para a ciência através de técnicas e procedimentos adotados, tornando universal a equação, capaz de ver na história da matemática um erro produzido pelo sistema adotado para o cálculo do ângulo entre os ponteiros do relógio, por autor, visando a melhoria na qualidade na prática e aprendizado significativo dos estudante do ensino médio do Brasil e o do mundo, haja visto, que este trabalho servirá de base para pesquisadores, no futuro próximo enxergar mudanças capazes de melhorar a aprendizado de forma significativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, J. J. D. S. A abordagem da trigonometria do Livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental. Iniciação Científica, v. 4, n. 2, p. 295-311, Dezembro 2019.

ALVARENGA, K. B.; ANDRADE, I. D.; SANTOS, R. D. J. Dificuldades na resolução de problemas básicos de matemática: um estudo de. Amazônia | Revista de Educação em Ciências e Matemática, v. 12, n. 24, p. 39-52, Jan/jul 2016. ISSN 95-243.

ALVES. F. R. V ; BORGES NETO. H. Uma aplicação da Sequência Fedathi no ensino de Progressões Geométricas e a formação do professor. In: Conexões, Ciência e Tecnologia, 2011.

ALVES. F. R. V. Didática da Matemática. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2010.

______. Filosofia das Ciências e da Matemática. Fortaleza:

Universidade Aberta do Brasil, 2011(a).

______. História da Matemática. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2011(b)

ALVES. F. R. V; BORGES NETO. H. Uma aplicação da Sequência Fedathi no ensino de Progressões Geométricas e a formação do professor. In: Conexões, Ciência e Tecnologia, 2011. ALVES. F. R. V. Didática da Matemática. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2010.

______. Filosofia das Ciências e da Matemática. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2011(a).

______. História da Matemática. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2011(b).

ALVES. F. R. V. Didática da Matemática. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil, 2010.

ABREU JÚNIOR, M. S. S., FREITAS, T. B., VIEIRA, A. R. L. As dificuldades dos professores em ensinar matemática no ensino médio. XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática A sala de aula de Matemática e suas vertentes. UESC, Ilhéus, Bahia de 03 a 06 de julho de 2019.

AFONSO, G. B., HOLETZ, M. S. Gamificando a Metodologia de Ensino da Matemática de Singapura no Ensino Fundamental. Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS – v. 14, n. 34, p. 2-22, 2021.

ARAÚJO, H. R. S., FONSECA, G. F. Educação de crianças surdas: O bilinguismo e a realidade escolar no município de Natal. Revista Caparaó, v. 2, n. 2, p, 1-27, 2020.

BOALER, J. Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre:

Penso; Cotia: Instituto Sidarta, 2017. 272 p. (Série Desafios da Educação).

BOAS, R. P. George Pólya: a biographical memoir. In: BIOGRAPHICAL MEMOIRS. Washington: National Academy of Sciences, 1990. v. 59. p. 337–355. Disponível em: http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/polya-george. pdf. Acesso em: 11 maio 2021

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base nacional comum curricular: educação é a base: ensino médio. Brasília: MEC, 2018. 150 p.

BOYER, C. B. História da matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p. Disponível em: http://

p1ortal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 11 maio 2021.

CHAMBERS, P.; TIMLIN, R. Ensinando matemática para adolescentes. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015. 288 p.

COELHO, M. S. L. Explorando metodologias de resolução de problemas em sala de aula para 6º ano. Curitiba: Secretaria da Educação, 2014. 33 p. (Os desafios da escola pública Resolução de problemas no ensino de matemática 11 paranaense na perspectiva do Professor, Produções Didático-Pedagógicas – PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_pdp_maria_solange_lopes_coelho.pdf. Acesso em: 11 maio 2021.

CARDOSO, M. R. G.; OLIVEIRA, G. S. D. A Resolução de Problemas para o ensino de Matemática. Cadernos da Fucamp, v. 18, p. 68-94, 2019. ISSN 1678-1244.

CLARETO, S. M. Educação Matemática e Contemporaneidade:Enfrentando Discursos Pós-Modernos. Bolema, Rio Claro – SP, v. 15, n. 17, p. 1-18, maio 2002. ISSN 978-85-89082-23-5.

DALLOB, P.; DOMINOWSKI, R. Insight and Problem Solving. In: DAVIDSON, J. ; STERNBERG, R The Nature of Insight, MIT: Press, 1992, p. 127-156.

DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. Teaching for Thinking. Washington: American Psychological Association, 1996

Dificuldades no Ensino e Aprendizagem de trigonometria: Uma análise das revistas de ensino. Universidade Federal dePernambuco. [S.l.], p. 39. 2019.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. Temas & Debate – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, [S. l.], v. 2, n. 2, p. 15–19, 1989. Disponível em: http:// sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index. php/td/article/view/2651. Acesso em: 11 maio 2021.

DAVIS, p. ; HERSH, R. L´Univers Mathématiques. Paris: Gauthiers et Villars, 1985.

FISCHBEIN, Efrain. Intuition in science and mathematics: an educational approach. Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educ

DANTE, L. R. Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010. 191 p.

DANTE, L. R. Matemática: parte 3. São Paulo: Ática, 2012. 355 p. (Projeto Voaz).

Elementos e nomenclatura da parábola. Alfa Connection, [S. l.], 2020. Disponível em: https://www.alfaconnection.

pro.br/matematica/geometria/circunferencia-elipse-hiperbole-e-parabola/elementos-e-nomenclatura-da-parabola/. Acesso em: 11 maio 2021

FASSA,. Pensando sobre relógios e ângulos. Revista de Educação em Ciências e Matemática, v. 10, n. 19, p. 5-18, agosto-Dezembro 2013. ISSN 95243.

GOMES, D. A.; BARBOSA, A. C. C.; CONCORDIDO, C. F. R. Ensino de matemática através da resolução de problemas: análise da disciplina RPM implantada pela SEEDUC-RJ. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 105–120, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/29552. Acesso em: 11 maio 2021

GOMES, I. D. F. Ensino de Sociologia em Debate: Abordagem da temática Direitos, 2015. 26.

GONÇALVES, J. P. Análise da dificuldade e da discriminação de itens de Matemática do Enem. Remat, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 4, n. 2, p. 38-53, 2018. ISSN 2447-2689.

HISTÓRIA da Trigonometria e cálculo USP. História da Trigonometria, 2023. Disponivel em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm#:~:text=Hist%C3%B3ria%20Trigonometria&text=A%20origem%20da%20trigonometria%20%C3%A9,com%20os%20eg%C3%ADpcios%20e%20babil%C3%B4nios.>. Acesso em: 16 http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm#:~:text=Hist%C3%B3ria%20Trigonometria&text=A%20origem%20dafevereiro 2023.

HADAMARD, J. An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. United Kingdo

IEZZI, G. Fundamentos da Matemática Elementar, Trigonometria: Exercícios resolvidos, exercícos propostos, testes de vestibular com respostas. 7ª. ed. São Paulo: Atual, v. 3, 1993.

IEZZI. Gelson. ; HAZZAN. Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar: sequências, matrizes e determinantes. v. 4. São Paulo: Editora Atual, 1977

KLEIN, M. E. Z.; COSTA, S. C. Investigando as Concepções Prévias dos Alunos doSegundo Ano do Ensino Médio e seus Desempenhosem alguns Conceitos do Campo Conceitual daTrigonometria. Bolema, Rio Claro SP, v. 24, n. 38, p. 43-73, abril 2011. ISSN 1980-4415.

KNIJNIK, G. Pesquisaa em educação Matemática na contemporaneidade: Perspectivas e desafios. Jieem- Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática,IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education, v. 9, n. 3, 2016.

LOPES, J. R. O uso da História da Trigonometria no Ensno. Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 4, n. 1, p. 14-27, Jan/abril 2014. ISSN 2238-2380.

MARQUES, F. S.; AMARAL FILHO, A. P. C. D. Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino de Matemática do ensino Fundamental. Revista Multidebate, Palmas TO, v. 4, n. 4, p. 11-28, Outubro 2020. ISSN 2594-4568.

MORAES, E. C. L. Revisitando os algoritmos para operações aritméticas fundamentais. 2015. 94 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Disponível em: . Acesso em: 2 out. 2018

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, ; PROENÇA, C. D. O que dizem as pesquisas sobre a resolução de problemas na formação inicial deprofessores de matemática: um olhar sobre as fragilidades metodológicas. Educ. Matem. Pesq., São

Paulo, v. 22, n. 2, p. 721-750, 2020.

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, A. ; PROENÇA, C. D. O que dizem as pesquisas sobre a resolução de problemas na formação inicial deprofessores de matemática: um olhar sobre as fragilidades metodológicas. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, São Paulo, v. 22, n. 2, p. 721-750, 2020.

MENEZES, G. D. et al. Do experimento à experimentação: metodologia ativa noensino de trigonometria. Rev. Monogr. Ambient., Santa Maria, v. 19, n. 4, p. 1-23, Maio 2020. ISSN 2236-1308.

MONTEIRO, B. B. et al. Contribuição da resolução de problemas como Metodologia de ensino de Matemática. Revista Reamec, Cuiabá, v. 8, n. 2, p. 57-68, maio-agosto 2020.

MOREY, B. B.; PEREIRA, A. C. C. Um ensaio sobre a história da trigonometria, Fortaleza, 9, dezembro 2015. 143-

152.

MUNDO Educação, 2023. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/sistema-internacional-unidades-si.htm>. Acesso em: 15 Fevereiro 2023.

O ensino de Matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades. Plurais, Salvador, v. 5, n. 2, p. 09-21, Maio-agosto 2020.

OLIVEIRA, A. T. E.; DINIZ, G. L. Ensino de Funções Trigonométricascom Modelagem Matemática. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, p. 3-7, abril 2022.

OLIVEIRA, C. M. S.; VAZ, A. D. F. As implicações do desenvolvimento da ciências e matemática. Revista Sapiência: sociedade, saberes e práticas educacionais – UEG/Câmpus de Iporá, v. 3, n. 2, p. 132-142, Jul/dezembro 2014. ISSN

2238-3565.

OLIVEIRA, G. P. D.; FERNANDES, R. U. O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégiaspedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 12, n. 3, p. 548-577, 2010.

OLIVEIRA, J. P. ; COSTA, R. ; ALVES, E. M.. ENTRE MAPAS, GLOBOS, SÓLIDOS, CADEIRASE RELÓGIO: OBJETOS PARA AS AULAS DOLYCEU DE SERGIPE. Revista de História e Historiografia da Educação, Curitiba, v. 5, n. 11, p. 36-63, agosto/dezembro 2022. ISSN 2526-2378.

OLIVEIRA, J. P. G.; COSTA, M.; ALVES, E. M. S. Entre mapas, globos, sólidos, cadeiras e relógio:Objetos para as aulas do Lyceu de Sergipe. Revista de História e Historiagrafia da Educação, Curitiba, v. 5, n. 11, p. 39-63, agosto--dezembro 2022.

OLIVEIRA, J. P. G.; COSTA, R. M.; ALVES, E. M.. ENTRE MAPAS, GLOBOS, SÓLIDOS, CADEIRASE RELÓGIO: OBJETOS PARA AS AULAS DOLYCEU DE SERGIPE. Revista de História e Historiografia da Educação, Curitiba, Brasil, v. 5, n. 11, p. 36-63, agosto/dezembro 2022.

PÓLYA, G. How to solve it: a new aspect of mathematical method. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 2004. 253 p.

PONTES, E. A. S. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. Revista Sítio Novo, Palmas, v. 2, n. 2, p. 44–56, jul./dez. 2018. Disponível em: https://sitionovo.ifto.edu.br/index. php/sitionovo/article/view/136. Acesso em: 11 maio 2021

PEREIRA , E.; GUERRA, E. A. A utilização do geogebra para a aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio. Rencima, v. 7, n. 3, p. 53-72, Agosto 2016.

PEREIRA, et al. Educação Matemática Crítica e a contemporaneidade: uma reflexão frente à problemática das fake news. Revista Educação Pública, p. 1-8, 16 Dezembro 2022. ISSN 1984-629.

PIMENTA, G. L. M.; JUSTULIN, A. M. Uma experiência de ensino-aprendizagem de áres de figuras planas através de resolução de problemas. Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 5, n. 11, p. 1-17, 2021.

PONTES, E. A. S. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de Matemática. Revista Sítio Novo, v. 2, p. 0-13, Julho/dezembro 2018. ISSN 2594-7036.

PROENÇA, M. C. D. Resolução de Problemas:Uma proposta de organização de ensino para a aprendizagem de conceitos Matemáticos. Revista de Educação Matemática, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 1-14, Fevereiro 2021. ISSN 25269062.

RODRIGUES, P. F. C.; SOUZA, M. A. V. F. D.; THIENGO, E. R. TTrigonometria:Conhecimento de conteúdos e de ensino fundamentados em uma visão sistemática de literatura. Revista de Ensino de Ciências e de Matemática, v. 13, n. 1, p. 5-25, Dezembro 2022. ISSN 2179426x.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. Revista Eletrônica de Educação, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 299–311, maio 2012. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413. Acesso em: 10 maio 2021.

ROSSETTO, D. ; BALIEIRO FILHO, I. F. A resolução de problemas no curriculo de Matemática do estado de São

Paulo e no Caderno do aluno. Revista Práxis Educacional, v. 17, n. 45, p. 428-450, abr/jun 2021.

REIS, A. M. A matemática egípcia: solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind. Orientador: Henrique Marins de Carvalho. 2018. 58 f. Trabalho de Conclusão do Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp. edu. br/pluginfile.php/167151/mod_resource/content/0/Alex%20 Marques%20dos%20 Reis.pdf. Acesso em: 11 maio 2021.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). Materiais manipulativos para o ensino das quatro operações básicas. Porto Alegre: Penso, 2016.

SMOLE, K. S.; MUNIZ, C. A. A matemática em sala de aula. Porto Alegre: Penso, 2013.

SILVA, L. P. M. Algoritmo da divisão. Mundo Educação, 2018. Disponível em: . Acesso em: 2 out. 2018.

SILVA, J. B. R. A Função do ábaco na formação continuada de professores dos anos iniciais. Curitiba: Appris, 2010.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (ed.). The teaching and assessing of mathematical problem solving. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates; Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 1–22. (Research agenda for mathematics education, 3).

SILVA, R. C. T. Z. Trigonometria: história e aplicações nocontexto escolar. Universidade Estadual Paulista(Unesp), Faculdade de Ciências. Bauru, 2019, p. 123. 2019.

SILVEIRA, J. S.; BALEIEIRO FILHO, I.. Uma Proposta para o Ensino de Trigonometria por Meio da História da Matemática. Unopar Cient. Exatas Tecnol., Londrina, Londrina, v. 12, n. 1, p. 51-60, Nov. 2013.

SOUZA, F. D. T. Trigonometria no Ensino Médio e suas Aplicações. Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 95. 2018.

TEIXEIRA, B. R.; SANTOS, E. R. Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas:alguns aspectos orientadores para a prática docente. BoEM, Joinville, v. 5, n. 8, p. 51-57, jan/jul 2017.

VANEILA BERTOLI, E. S. História da Matemática, História da Educação Matemática. ResearchGate, p. 0-14, 23 Fevereiro 2017.

Do autor

Rivanaldo Martins Lopes

Rivanaldo Martins Lopes nasceu em 9 de maio de 1980, na cidade de São Francisco, no sertão paraibano. Mais tarde, passou a residir no sítio Santo Amaro, com sua esposa Robelucia Oliveira de Sá e seus dois filhos, Geovana Oliveira Lopes e Hugo Oliveira Lopes. Sua principal área de atuação foi o ensino de Matemática, tanto na Escola Cidadã Integral de Ensino Dorgival Silveira, onde lecionou, quanto como pesquisador na ACU.

Ele formou-se em Matemática pela UFCG-Universidade Federal de Campina Grande, além de especialização pela UEPB. Rivanaldo, também, obteve o título de Mestre em Educação pela ACU-Absoulute Christian University, na Flórida, EUA, assim como concluiu o Mestrado profissional na UAB-Universidade Aberta do Brasil. Sua trajetória acadêmica culminou com o Doutorado em Educação pela ACU.

Além de suas atividades de ensino e pesquisa, Rivanaldo dedicou-se à produção acadêmica, com ênfase em publicações em revistas, com artigos, e capítulos de livros didáticos relevantes para a área de atuação. Ele também escreveu livros de Matemática, que abordam melhorias na metodologia de ensino da trigonometria na circunferência trigonométrica. Sua proposta inovadora incluiu a demonstração de uma fórmula com o objetivo de superar as dificuldades enfrentadas por estudantes e professores no ensino de Matemática em escolas públicas e privadas. Essa pesquisa teve início por volta de 2001, quando Rivanaldo ainda era estudante do Ensino Médio na escola Mestre Júlio Sarmento. Posteriormente, ele apresentou suas propostas de mudança na UFCG, em seu relatório de conclusão de curso em 2009.

Política e Escopo da Coleção de livros Humanas em Perspectiva

A Humanas em Perspectiva (HP) é uma coleção de livros publicados anualmente destinado a pesquisadores das áreas das ciências humanas. Nosso objetivo é servir de espaço para divulgação de produção acadêmica temática sobre essas áreas, permitindo o livre acesso e divulgação dos escritos dos autores. O nosso público-alvo para receber as produções são pós-doutores, doutores, mestres e estudantes de pós-graduação. Dessa maneira os autores devem possuir alguma titulação citada ou cursar algum curso de pós-graduação. Além disso, a Coleção aceitará a participação em coautoria.

A nossa política de submissão receberá artigos científicos com no mínimo de 5.000 e máximo de 8.000 palavras e resenhas críticas com no mínimo de 5 e máximo de 8 páginas. A HP irá receber também resumos expandidos entre 2.500 a 3.000 caracteres, acompanhado de título em inglês, abstract e keywords.

O recebimento dos trabalhos se dará pelo fluxo continuo, sendo publicado por ano 10 volumes dessa coleção. Os trabalhos podem ser escritos em portugês, inglês ou espanhol.

A nossa política de avaliação destina-se a seguir os critérios da novidade, discussão fundamentada e revestida de relevante valor teórico - prático, sempre dando preferência ao recebimento de artigos com pesquisas empíricas, não rejeitando as outras abordagens metodológicas.

Dessa forma os artigos serão analisados através do mérito (em que se discutirá se o trabalho se adequa as propostas da coleção) e da formatação (que corresponde a uma avaliação do português e da língua estrangeira utilizada).

O tempo de análise de cada trabalho será em torno de dois meses após o depósito em nosso site. O processo de avaliação do artigose dá inicialmente na submissão de artigos sem a menção do(s) autor(es) e/ou coautor(es) em nenhum momento durante a fase de submissão eletrônica. A menção dos dados é feita apenas ao sistema que deixa em oculto o (s) nome(s) do(s) autor(es) ou coautor(es) aos avaliadores, com o objetivo de viabilizar a imparcialidade da avaliação. A escolha do avaliador(a) é feita pelo editor de acordo com a área de formação na graduação e pós-graduação do(a) professor(a) avaliador(a) com a temática a ser abordada pelo(s) autor(es) e/ou coautor(es) do artigo avaliado. Terminada a avaliação sem menção do(s) nome(s) do(s) autor(es) e/ou coautor(es) é enviado pelo(a) avaliador(a) uma carta de aceite, aceite com alteração ou rejeição do artigo enviado a depender do parecer do(a) avaliador(a). A etapa posterior é a elaboração da carta pelo editor com o respectivo parecer do(a) avaliador(a) para o(s) autor(es) e/ou coautor(es). Por fim, se o trabalho for aceito ou aceito com sugestões de modificações, o(s) autor(es) e/ou coautor(es) são comunicados dos respectivos prazos e acréscimo de seu(s) dados(s) bem como qualificação acadêmica.

A nossa coleção de livros também se dedica a publicação de uma obra completa referente a monografias, dissertações ou teses de doutorado.

O público terá terão acesso livre imediato ao conteúdo das obras, seguindo o princípio de que disponibilizar gratuitamente o conhecimento científico ao público proporciona maior democratização mundial do conhecimento.

Indice Remissivo

página 98

página 121

Agradecimento

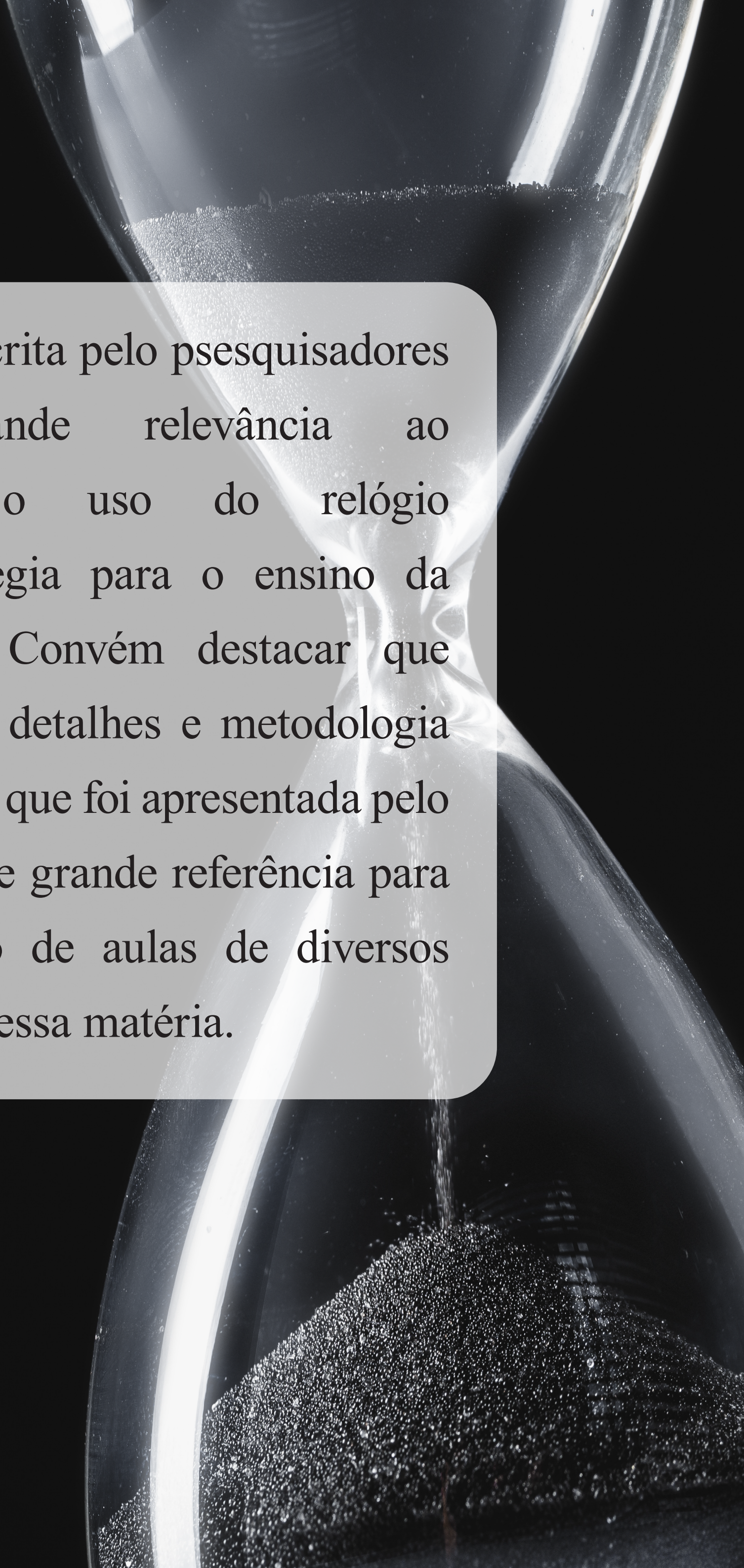
Agradeço a minha orientadora Dra. Rosiane de Lourdes Silva de Lima;

Agradeço a minha família pelo entendimento nas horas de ausência;

Agradeço aminha querida mãe Maria das Graças Silveira Lopes;

Agradeço a professora Suely de Aquino Brito; Agradeço a professora, Mestre Edneide Pedro Carvalho da Silva;

Agradeço a Deus pelo este momento.



Essa obra escrita pelo psesquisadores possui grande relevância ao apresentar o uso do relógio como estratégia para o ensino da matemática. Convém destacar que a riqueza de detalhes e metodologia para o ensino que foi apresentada pelo autor serve de grande referência para a preparação de aulas de diversos professores dessa matéria.

Periodicojs
EDITORA ACADÊMICA